

## 9 Singulárny rozklad matice

**Príklad 1** *Nájdime singulárny rozklad matice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu  $U$ , ktorá je tvorená vlastnými vektormi matice  $A \cdot A^T$ . A teda

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}.$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^T - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 16 - \lambda & 12 \\ 12 & 34 - \lambda \end{vmatrix} = (16 - \lambda)(34 - \lambda) - 12 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 50\lambda + 400 = 0. \end{aligned}$$

Riešime pomocou diskriminantu

$$D = 50^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 2500 - 1600 = 900,$$

a preto

$$\lambda_{1,2} = \frac{50 \pm 30}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 40, \\ \lambda_2 = 10. \end{cases}$$

Nájdeme vlastné vektory prislúchajúce vlastnému číslu  $\lambda_1 = 40$ , ktoré sú riešením homogénnej sústavy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16 - \lambda_1 & 12 \\ 12 & 34 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 16 - 40 & 12 \\ 12 & 34 - 40 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom podľa prvého riadku

$$\begin{aligned} u_{11} &= (-1)^{1+1} \det(-6) \cdot k = -6k, \\ u_{12} &= (-1)^{1+2} \det(12) \cdot k = -12k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

bez ujmy na všeobecnosti je jedným z riešení vektor  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ktorý znor-  
malizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \right).$$

Pre vlastné číslo  $\lambda_2 = 10$  riešime sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16 - \lambda_2 & 12 \\ 12 & 34 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 16 - 10 & 12 \\ 12 & 34 - 10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

opäť napríklad rozvojom prvého riadku

$$\begin{aligned} u_{21} &= (-1)^{1+1} \det(24) \cdot k = 24k, \\ u_{22} &= (-1)^{1+2} \det(12) \cdot k = -12k, \end{aligned}$$

bez ujmy na všeobecnosti je jedným riešením napríklad vektor  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  
ktorý opäť znormalizujeme

$$\mathbf{u}_2^T = \frac{(2, -1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right).$$

Matica  $U$  má tvar

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu  $V$ , ktorá je tvorená vlastnými vektormi matice  $A^T \cdot A$ , preto

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix},$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \det(A^T \cdot A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 25 - \lambda & -15 \\ -15 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = (25 - \lambda)(25 - \lambda) - 15 \cdot 15 \\ &= \lambda^2 - 50\lambda + 400, \end{aligned}$$

a jej vlastné čísla budú opäť  $\lambda_1 = 40$  a  $\lambda_2 = 10$ . Pre prvé vlastné číslo hľadáme vlastný vektor, ktorý vyhovuje homogénemu systému

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 25 - \lambda_1 & -15 \\ -15 & 25 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 25 - 40 & -15 \\ -15 & 25 - 40 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Je zrejmé že riešením je napríklad vektor  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ktorý znormalizujeme

$$\tilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{(1, -1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pre druhé vlastné číslo  $\lambda_2 = 10$  riešime sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 25 - \lambda_2 & -15 \\ -15 & 25 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 25 - 10 & -15 \\ -15 & 25 - 10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorá má riešenie  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ktorý znormalizujeme

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^T = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

A matica  $V$  je

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

pre rekonpozíciu použijeme jej transponovaný tvar

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Zrejme platí

$$\begin{aligned} U \cdot S \cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{3}{10}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0 & 0 \\ 3.0 & -5.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Príklad 2** Nájdime singularný rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu  $U$ , tvorenú vlastnými vektormi matice

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\det(A \cdot A^T - \lambda \cdot I) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

čiže

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

preto vlastné čísla tejto matice sú

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ku vla. č.  $\lambda_1 = 6$  bude prislúchať vlastný vektor vyhovujúci homogénnemu systému lineárnych rovníc

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom napr. 1 riadka a dostávame

$$\begin{aligned} u_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 25k, \\ u_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 5k, \\ u_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 10k, \end{aligned}$$

a jedným z riešení je napríklad vektor  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ktorý znormalizujeme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1^T &= \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{(5, 1, 2)^T}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{(5, 1, 2)^T}{\sqrt{30}} = \left( \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)^T \\ &= \left( \frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15} \right)^T. \end{aligned}$$

Pre vlastné č.  $\lambda_2 = 1$  riešime sústavu

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom podľa druhého riadku

$$u_{2_1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 0,$$

$$u_{2_2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -4k,$$

$$u_{2_3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 2k,$$

teda  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ktorý tiež znormujeme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_2^T &= \frac{\mathbf{u}_2^T}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{(0, 2, -1)}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^T \\ &= \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)^T. \end{aligned}$$

A pre vlastné číslo  $\lambda_3 = 0$  riešime homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 - \lambda_3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

riešime rozvojom prvého riadka

$$u_{3_1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} k = k,$$

$$u_{3_2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k = -k,$$

$$u_{3_3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k = -2k$$

teda  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , ktorý takisto znormujeme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_3^T &= \frac{\mathbf{u}_3^T}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{(1, -1, -2)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)^T \\ &= \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3} \right)^T. \end{aligned}$$

Matice  $V$  bude tvorená vlastnými vektormi matice

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

ktorá bude mať tie isté vlatsné čísla (okrem nulového) ako matice  $A \cdot A^T$ , keďže jej charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0.$$

Pre  $\lambda_1 = 6$  riešime

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - 6 & 2 \\ 2 & 5 - 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

rozvojom prvého riadku by sme dostali napríklad jedno z riešení  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

ktorý má normlizovaný tvar  $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ .

A podobne pre  $\lambda_2 = 1$  riešime sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - 1 & 2 \\ 2 & 5 - 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorá má napríklad riešenie  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , ktorý má normlizovaný tvar  $\tilde{\mathbf{v}}_2 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Čiže matica  $U$  má stĺpce tvorené vlastnými vektormi  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ , teda

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

a podobne matica

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

avšak do redekompózie dosádzame jej transponovaný tvar (v tomto prípade totožný)

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} U \cdot S \cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{30}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} & \frac{1}{15}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} \\ \frac{1}{150}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} + \frac{4}{5} & \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} - \frac{2}{5} & \frac{2}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & -1.2622 \times 10^{-29} \\ -1.2622 \times 10^{-29} & 1.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$