7 Numerické riešenie nelineárnej sústavy

Príklad 1 *Pomocou Newton-Raphsonovej metódy riešme nelineárnu sústavu*

$$\begin{aligned} 4y\sin x + 0.6 &= 0, \\ 4y^2 - 4y\cos x + 0.3 &= 0, \end{aligned}$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$.

Riešime sústavu, ktorej vektorová funkcia $\mathbf{f}(x,y)$ *je určená funkciami*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 4y\sin x + 0.6 = 0, \\ f_2(x,y) &= 4y^2 - 4y\cos x + 0.3 = 0, \end{aligned}$$

ktorej prislúcha Jakobiho matica

$$J_{\mathbf{f}(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y\cos x & 4\sin x \\ 4y\sin x & 8y - 4\cos x \end{pmatrix}.$$

Zvolíme počiatočnú aproximáciu

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix},$$

pre ktorú platí

$$\mathbf{f}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4y_0\sin x_0 + 0.6 \\ 4y_0^2 - 4y_0\cos x_0 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9659 \\ 2.1388 \end{pmatrix}$$

a Jakobiho matica a inverzná matica sú

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{f}(x_0,y_0)} &= \begin{pmatrix} 4y_0\cos x_0 & 4\sin x_0 \\ 4y_0\sin x_0 & 8y_0 - 4\cos x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1612 & 3.3659 \\ 3.3659 & 5.8388 \end{pmatrix}, \\ J^{-1}_{\mathbf{f}(x_0,y_0)} &= \begin{pmatrix} 4.5273 & -2.6099 \\ -2.6099 & 1.6758 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A nasledujúci člen iteračnej postupnosti je

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - J^{-1}_{\mathbf{f}(x_0,y_0)} \cdot \mathbf{f}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} -11.3729 \\ 7.7663 \end{pmatrix}$$

a podobne by sme postupovali v ďalších krokoch

k	x_k	y_k
0	1.0000	1.0000
1	−11.3729	7.7663
2	−12.9616	4.7290
3	−12.7619	2.6540
4	−12.6987	1.6180
5	−12.6990	1.1328
6	−12.7212	0.9455
7	−12.7323	0.9052
8	−12.7332	0.9031

Nakoľko platí

$$\begin{pmatrix} |x_8 - x_7| \\ |y_8 - y_7| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |-12.7332 + 12.7323| \\ |0.9031 - 0.9052| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0011 \\ 0.0021 \end{pmatrix}$$

približné riešenie je

$$\begin{pmatrix} x_8 \\ y_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.73 \\ 0.90 \end{pmatrix}.$$

Príklad 2 *Newtonovou-Raphsonovou metódou s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$ *riešme sústavu nelineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} xy + x^2 - y^3 - 1 &= 0, \\ x + 2y - xy^2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Vektorová funkcia sústavy má tvar

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + x^2 - y^3 - 1 \\ x + 2y - xy^2 - 2 \end{pmatrix}$$

a k nemu prislúch Jacobiho matica tvaru

$$J_{\mathbf{f}(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2x & x - 3y^2 \\ 1 - y^2 & 2 - 2xy \end{pmatrix}.$$

Za počiatočnú aproximáciu zvolíme

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100.0000 \\ 100.0000 \end{pmatrix}$$

a použitím iteračného vzťahu pre Newtonovú-Raphsonovú metódu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

dostávame iteračnú postupnosť zapísanú v tabuľke

k	x_k	y_k
0	100.0000	100.0000
1	66.2490	66.8854
2	43.7711	44.8044
3	28.8177	30.0776
4	18.8922	20.2516
5	12.3322	13.6911
6	8.0299	9.3067
7	5.2455	6.3739
8	3.4817	4.4127
9	2.4005	3.1068
10	1.7672	2.2492
11	1.4153	1.7036
12	1.2258	1.3759
13	1.1222	1.1936
14	1.0643	1.0643
15	1.0329	1.0495
16	1.0166	1.0249
17	1.0083	1.0125
18	1.0042	1.0063

Nakoľko platí

$$\begin{pmatrix} |x_{20} - x_{19}| \\ |y_{20} - y_{19}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1.0042 - 1.0083| \\ |1.0063 - 1.0125| \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} 0.0041 \\ 0.0066 \end{pmatrix} < 0.01 = \varepsilon,$$

je približné riešenie

$$\mathbf{x}_{20} = \begin{pmatrix} 1.0042 \\ 1.0063 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix} \pm 0.01.$$