6 Numerické riešenie nelineárnej rovnice

Príklad 1 *Metódou bisekcie (polenia intervalu) nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0,$$

na intervale $[0, 0.5]$ *s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$.

Postup zapíšeme do tabuľky

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$
0	0.0000	0.2500	0.5000	$-$	$-$
1	0.2500	0.3750	0.5000	$-$	$+$
2	0.2500	0.3125	0.3750	$-$	$-$
3	0.3125	0.3432	0.3750	$-$	$-$
4	0.3432	0.3594	0.3750	$-$	$-$
5	0.3594	0.3672	0.3750		

Nakoľko platí

$$|x_5 - x_4| = |0.3672 - 0.3594| = 0.0078 < 0.01 = \varepsilon,$$

za približné riešenie považujeme hodnotu

$$x_5 = 0.37 \pm 0.01.$$

Príklad 2 *Metódou bisekcie (polenia intervalu) nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = e^{-x}(3.2 \cdot \sin x - 0.5 \cdot \cos x) = 0,$$

na intervale $[3, 4]$ *s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$.

Čiastkové výsledky zapíšeme do tabuľky

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$
0	3.0000	3.5000	4.0000	$+$	$-$
1	3.0000	3.2500	3.5000	$+$	$+$
2	3.2500	3.3750	3.5000	$+$	$-$
3	3.2500	3.3125	3.3750	$+$	$-$
4	3.2500	3.2813	3.3125	$+$	$+$
5	3.2813	3.2969	3.3125	$+$	$-$
6	3.2813	3.2891	3.2969		

Zrejme platí

$$|x_6 - x_5| = |3.2891 - 3.2969| = 0.0078 < 0.01 = \varepsilon,$$

a preto približné riešenie je $x_6 \doteq 3.29$ *s prípustnou chybou* $\varepsilon = 0.01$.

Príklad 3 *Metódou bisekcie nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

na intervale $[1, 2]$ *s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$.

Riešenie zapíšeme do tabuľky

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$
0	1.0000	1.5000	2.0000	$-$	$+$
1	1.0000	1.2500	1.5000	$-$	$-$
2	1.2500	1.3750	1.5000	$-$	$+$
3	1.2500	1.3125	1.3750	$-$	$-$
4	1.3125	1.3438	1.3750	$-$	$+$
5	1.3125	1.3281	1.3438	$-$	$+$
6	1.3125	1.3203	1.3281		

Nakoľko platí

$$|x_6 - x_5| = |1.3203 - 1.3281| = 0.007\,8 < 0.01 = \varepsilon,$$

ukončíme iteračný proces a približné riešenie je $x_6 = 1.32$ *s presnosťou* 0.01.

Príklad 4 *Metódou prostej iterácie nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *na intervale* $[1.5, 2]$.

Úlohu nájsť koreň rovnice $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0$ *transformujeme na úlohu hľadania pevného bodu, teda zobrazenie bodu samého do seba.*

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\sqrt{\sin x}.$$

Ov eríme kontraktívnosť funkcie $\varphi(x) = 2\sqrt{\sin x}$ *na intervale* $[1.5, 2]$, *teda*

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}},$$

pre ktorú je na $[1.5, 2]$ *platí* $|\varphi'(x)| = \left|\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right| < 1$. *Takže itetračná postupnosť zapíšeme*

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1.5000, \\
x_1 &= 2\sqrt{\sin x_0} = 1.9975, \\
x_2 &= 2\sqrt{\sin x_1} = 1.9082, \\
x_3 &= 2\sqrt{\sin x_2} = 1.9428, \\
x_4 &= 2\sqrt{\sin x_3} = 1.9304, \\
x_5 &= 2\sqrt{\sin x_4} = 1.9350.
\end{aligned}$$

Keďže platí $|x_5 - x_4| = |1.9350 - 1.9304| = 0.0046 < 0.01 = \varepsilon$, *iteračný proces ukončíme a za približné riešenie považujeme* $x_5 = 1.94$ *s prsnosťou* ± 0.01.

Example 1 *Metódou prostej iterácie (metódou pevného bodu) nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *a na intervale* $[0, 1]$.

Najskôr si transformujeme úlohu z hľadania koreňa

$$f(x) = 0$$

na hľadanie pevného bodu vyjadrenia

$$x = \varphi(x),$$

zrejme

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{7}\left(x^3 + 2\right).$$

Zderivujeme

$$\varphi'(x) = \frac{3}{7}x^2,$$

pre túto funkciu na intervale $[0, 1]$ *platí* $\left|\frac{3}{7}x^2\right| \leq \frac{3}{7} < 1$, *preto je na* $[0, 1]$ *kontraktívna a iteračná postupnosť definovaná vzťahom*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{7}\left(x_k^3 + 2\right)$$

bude konvegovať k pevnému bodu funkcie $\varphi(x)$ *(a aj k presnému riešeniu rovnice* $f(x) = 0$*) pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu* $x_0 \in [0, 1]$. *Preto*

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.0000, \\ x_1 &= \varphi(x_0) = 0.2857, \\ x_2 &= \varphi(x_1) = 0.2890. \end{aligned}$$

Nakoľko platí $|x_2 - x_1| = |0.2890 - 0.2857| = 0.0033 < 0.01$ *a teda približné riešenie je* $x_2 \doteq 0.29 \pm 0.01$.

Príklad 5 *Metódou prostej iterácie (metódou pevného bodu) nájdime približné riešenie nelineárnej rovnice*

$$f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *na intervale* $[0, 1]$.

Transformujeme si úlohu hľadania koreňa rovnice

$$f(x) = 0,$$

na hľadanie pevného bodu funkcie

$$x = \varphi(x).$$

Vyjadríme nasledujúcim spôsobom

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{7}\left(x^3 + 2\right),$$

kde pre deriváciu funkcie $\varphi(x)$ *platí*

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2}{7},$$

že je na intervale $[0,1]$ *určite ohraničená, t. j. platí* $\forall x \in [0,1]$

$$\left|\frac{3x^2}{7}\right| \leq \frac{3}{7} < 1,$$

a teda aj funkcia $\varphi(x)$ *je kontraktívna na tomto intervale a metóda prostej iterácie definovaná predpisom*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{7}\left(x_k^3 + 2\right)$$

bude konvergovať k sbvojmu pevnému bodu (a k riešeniu $f(x) = 0$*) pre ľubovoľnú počiatočnu aproximáciu* $x_0 \in [0,1]$. *Preto zvolíme za* $x_0 = 0.0000$ *a následne hľadáme ďalšie členy iteračnej postupnosti*

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.0000, \\ x_1 &= \varphi(x_0) = \frac{1}{7}\left(x_0^3 + 2\right) = \frac{1}{7}(0+2) \doteq 0.2857, \\ x_2 &= \varphi(x_1) = \frac{1}{7}\left(x_1^3 + 2\right) = \frac{1}{7}\left(0.2857^3 + 2\right) \doteq 0.2890. \end{aligned}$$

Iteračný proces môžeme ukončiť, nakoľko platí

$$|x_2 - x_1| = |0.2890 - 0.2857| = 0.0033 < 0.01 = \varepsilon$$

a za približné riešenie s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *požažujeme* $x_2 \doteq 0.29$.

Príklad 6 *Newtonovou metódou (dotyčníc) riešme nelineárnu rovnicu*

$$f(x) = \cos x + 2\sin x + x^2 = 0,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$, *na intervale* $[-1,0]$.

Pre potreby overenia platnosti Fourierovej podmienky potrebujeme nájsť prvú a druhú deriváciu

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + 2\cos x + 2x, \\ f''(x) &= -\cos x - 2\sin x + 2. \end{aligned}$$

Overíme platnosť Fourierovej podmienky pre počiatočnu aproximáciu $x_0 = -1$, *teda*

$$\begin{aligned} f(-1) &= \cos(-1) + 2\sin(-1) + (-1)^2 < 0, \\ f''(-1) &= -\cos(-1) - 2\sin(-1) + 2 > 0, \end{aligned}$$

čiže nie sú splnené predpolady Fourierovej podmienky. Skúsime overiť pre počiatočnu aproximáciu $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 + 2\sin 0 + 0^2 = 1 > 0, \\ f''(0) &= -\cos 0 - 2\sin 0 + 2 = 1 > 0, \end{aligned}$$

vidíme, že je splnená podmienka

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

a teda iteračná postupnosť bude konvergovať. Preto

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.0000, \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.5000, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.6367, \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.6586, \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0.6593. \end{aligned}$$

Opäť vidíme, že

$$|x_4 - x_3| = |-0.6593 + 0.6586| = 0.000\,7 < 0.01 = \varepsilon,$$

a teda približné riešenie je $x_4 = -0.66$.