5 Testovanie štatistických hypotéz

Príklad 1 *Pre zadaný súbor, ktorý obsahuje výšku jednotlivcov*

$$184, 193, 202, 204, 164, 204, 185, 210, 183, 182, 180,$$

otestujme na hladine významnosti $\alpha = 5\%$ *hypotézu či je stredná hodnota väčšia ako 190, a takisto či je smerodajná odchýlka menšia ako 5.*

Testujeme hypotézu o parametri strednej hodnoty, a to tieto dve hypotézy

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 190, \\ H_1 &: \mu > 190. \end{aligned}$$

Najskôr si vypočítame bodové odhady strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky. Výberový priemer je

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \mu \approx \overline{x} = \frac{1}{11}(184 + 193 + 202 + 204 + 164 + 204 + 185 + 210 + 183 + 182 + 180) \\ &= 190.09 \end{aligned}$$

a výberový rozptyl je

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sigma^2 \approx S_x^2 = \frac{1}{11-1}((184-190.09)^2 + (193-190.09)^2 + (202-190.09)^2 \\ &\quad + (204-190.09)^2 + (164-190.09)^2 + (204-190.09)^2 \\ &\quad + (185-190.09)^2 + (210-190.09)^2 + (183-190.09)^2 \\ &\quad + (182-190.09)^2 + (180-190.09)^2) \\ &= 189.49, \end{aligned}$$

čiže výberová smerodajná odchýlka je

$$\sigma \approx S_x = \sqrt{189.49} \doteq 13.77.$$

Hodnota testovacej štatistiky je

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n} = \frac{190.09 - 190}{13.77} \cdot \sqrt{11} \doteq 0.022.$$

A príslušná kritická hodnota je

$$t_{1-\alpha}^{(n-1)} = t_{1-0.05}^{(11-1)} = t_{0.95}^{(10)} = 1.812.$$

Nakoľko platí, že

$$T = 0.022 \ngtr 1.812 = t_{0.95}^{(10)},$$

vypočítaná štatistika nepatrí do oblasti zamietnutia hypotézy H_0*, hypotézu* H_0 *prijímame a skutočne na zadanej hladine významnosti stredná hodnota nie je väčšia ako* 190 *cm.*

Otestujeme tvrdenia pre smerodajnú odchýlku. Nulová a alternatívna hypotéza sú

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma = 5, \\ H_1 &: \sigma < 5. \end{aligned}$$

Testovacia štatistika je

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(11-1) \cdot 189.49}{5^2} = 75.80.$$

Kritická hodnota pre hladinu významnosti $\alpha = 5\%$ *je*

$$\chi^2_{1-\alpha,(n-1)} = \chi^2_{0.95,(10)} = 3.94.$$

Zrejme platí

$$\chi^2 = 75.80 \not< 3.94 = \chi^2_{0.95,(10)},$$

a preto testovacia štatistika nepatrí do oblasti zamietnutia hypotézy H, *a teda zamietame hypotézu* H_1, *ktorá tvrdila, že mserodajná odchýlka je menšia ako 5.*

Príklad 2 *Pre súbor, ktorý predstavuje výšku jednotlivých študentov tochto kúžku*

$$193, 175, 185, 180, 176, 178, 195, 176, 178$$

otestujjme hypotézu, či stredná hodnota väčšia ako 185 *cm, na hladine významnosti* $\alpha = 5\%$.

Najskôr vypočítame výberový priemer a výberový rozptyl (resp. výberovú smerodajnú odchýlku), teda bodovo odhadneme strednú hodnotu $E(\xi) = \mu$ *a rozptyl* $D(\xi) = \sigma^2$, *a teda platí*

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \mu \approx \overline{x} = \frac{1}{9}(193 + 175 + 185 + 180 + 176 + 178 + 195 + 176 + 178) \\ &\doteq 181.78 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sigma^2 \approx S_x^2 = \frac{1}{9-1}((193-181.78)^2 + (175-181.78)^2 + (185-181.78)^2 \\ &\quad + (180-181.78)^2 + (176-181.78)^2 + (178-181.78)^2 \\ &\quad + (195-181.78)^2 + (176-181.78)^2 + (178-181.78)^2) \\ &\doteq 56.94. \end{aligned}$$

Testujeme proti sebe dve disjunktné hypotézy (nulová vs. alternatívna)

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 185, \\ H_1 &: \mu > 185. \end{aligned}$$

Testovacia štatistika je

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S_x}\sqrt{n} = \frac{181.78 - 185}{\sqrt{56.94}}\sqrt{9} \doteq -1.28.$$

Túto hodnotu porovnáme s kritickou hodnotou Studentovho t-rozdelenia

$$t_{1-\alpha}^{(n-1)} = t_{1-0.05}^{(9-1)} = t_{0.95}^{(8)} = 1.86.$$

Nakoľko platí

$$T = -1.28 \ngtr 1.86 = t_{0.95}^{(8)},$$

je zrejmé, že sa nenachádzame v oblasti zamietnutia hypotézy H_0, a teda túto hypotézu nezamietame ale prijímame $H_0 : \mu = 185$, t. j. nie je pravdou, že stredná hodnota zadaného súboru je väčšia ako 185 cm s prípustnou chybou 5%.

Príklad 3 *Pre súbor, ktorý predstavuje výšku jednotlivých študentov tochto krúžku*

$$178, 186, 186, 176, 174, 167$$

otestujme hypotézu, či stredná hodnota rovná 185 cm, na hladine významnosti $\alpha = 5\%$. Ak nie navrhnime a otestujme vhodný jednostranný test pre strednú hodnotu.

Vypočítame bodové odhady zadaného súboru, to znamená, že

$$E(\xi) = \mu \approx \overline{x} = \frac{1}{6}(178 + 186 + 186 + 176 + 174 + 167) = 177.83,$$

a

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \sigma^2 \approx S_x^2 = \frac{1}{6-1}((178 - 177.83)^2 + (186 - 177.83)^2 \\ &\quad + (186 - 177.83)^2 + (176 - 177.83)^2 \\ &\quad + (174 - 177.83)^2 + (167 - 177.83)^2 \\ &\doteq 53.77, \end{aligned}$$

odkiaľ pre výberovú smerodajnú odchýlku platí

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{53.77} \doteq 7.33.$$

Zrejme testujeme proti sebe hypotézy

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = \mu_0, \text{ teda } \mu = 185, \\ H_1 &: \mu \neq \mu_0, \text{ teda } \mu \neq 185. \end{aligned}$$

Testovacia štatistika je

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S_x}\sqrt{n} = \frac{177.83 - 185}{7.33}\sqrt{6} \doteq -2.40.$$

Oblasť zamietnutia hypotézy H_0 je

$$|T| \geq t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

preto kritická hodnota je

$$t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{(6-1)}_{1-\frac{5\%}{2}} = t^{(5)}_{0.975} = 2.571.$$

Nakoľko platí

$$|T| = |-2.40| = 2.40 \ngeq 2.571 = t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

hypotézu H_0 nezamietame ale prijímame, a teda na daneju hladine významnosti neexistuje významný rozdiel strednej hodnoty oproti hodnote 185.

Príklad 4 *Otestujte mieru významnosti odchýlky smerodajnej odchýlky od hodnoty 5 na hladine významnosti $\alpha = 5\%$.*

Testujeme hypotézy

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma = \sigma_0, \text{ teda } \sigma = 5, \\ H_1 &: \sigma \neq \sigma_0, \text{ teda } \sigma \neq 5. \end{aligned}$$

Testovacia štatistika je

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(6-1)\cdot 53.77}{5^2} = 10.754.$$

Oblasť zamišetnutia H_0 je

$$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)}, \text{ alebo } \chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)}.$$

Tieto kritické hodnoty sú

$$\begin{aligned} \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)} &= \chi^2_{1-\frac{5\%}{2},(6-1)} = \chi^2_{0.975,(5)} = 0.83, \\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} &= \chi^2_{\frac{5\%}{2},(6-1)} = \chi^2_{0.025,(5)} = 12.83. \end{aligned}$$

A keďže neplatí

$$\chi^2 = 10.754 \nleq 0.83 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)},$$

a zároveň neplatí ani

$$\chi^2 = 10.754 \ngeq 12.83 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},(n-1)},$$

vidíme, že nezamietame ale prijímame hypotézu H_0, teda na danej hladine významnosti nie je možné tvrdiť, že sa smerodajná odchýlka líši od hodnoty 5.

Príklad 5 *Porovnajme nasledujúce dva súbory (ich stredné hodnoty).*

$$178, 186, 186, 176, 174, 167$$
$$184, 193, 202, 204, 164, 204, 185, 210, 183, 182, 180.$$

Hodnoty bodových odhadov sme už vypočítali v Príkladoch (1 a 3), sú to tieto hodnoty

$$\begin{aligned}\overline{x}_1 &= 177.83, S^2_{x_1} = 53.77 \Rightarrow S_{x_1} = 7.33, n_1 = 6,\\ \overline{x}_2 &= 190.09, S^2_{x_2} = 189.49 \Rightarrow S_{x_2} = 13.77, n_2 = 11.\end{aligned}$$

Testujeme proti sebe hypotézy

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_1 = \mu_2,\\ H_1 &: \mu_1 < \mu_2.\end{aligned}$$

Testovaciu štatistiku vypočítame až po výpočte spoločného výberového rozptylu (súbory sú malé, t. j. $n_1 + n_2 = n < 30$*)*

$$\begin{aligned}S^2_p &= \frac{(n_1 - 1)\cdot S^2_{x_1} + (n_2 - 1)\cdot S^2_{x_2}}{(n_1 + n_2 - 2)}\\ &= \frac{5\cdot 53.77 + 10\cdot 189.49}{15} = 144.25,\end{aligned}$$

a teda

$$U = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{S^2_p\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{177.83 - 190.09}{\sqrt{144.25\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{11}\right)}} \doteq -2.011.$$

Pre oblasť zamietnutia hypotézy H_0 *je*

$$U \leq -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha},$$

kde táto kritická hodnota je tabelovaná

$$-t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha} = -t^{(15)}_{0.95} = -1.753.$$

A keďže platí

$$U = -2.011 \leq -1.753 = -t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\alpha}$$

naozaj zamietame na danej hladine významnosti $\alpha = 5\%$ *tvrdenie o zhode dvoch priemerov a potvrdzujeme tvrdenie alternatívnej hypotézy* H_1*, že platí* $\mu_1 < \mu_2$*.*

Príklad 6 *Porovnajme stredné hodnoty dvoch súborov z prvých príkladov.*

Zrejme platí:

$$\begin{aligned}\overline{x}_1 &= 190.09, S^2_{x_1} = 189.49 \Rightarrow S_{x_1} = 13.77, n_1 = 11,\\ \overline{x}_2 &= 181.78, S^2_{x_2} = 56.94 \Rightarrow S_{x_2} = 7.55, n_1 = 9.\end{aligned}$$

Zrejme testujeme proti sebe hypotézy

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_1 = \mu_2,\\ H_1 &: \mu_1 > \mu_2.\end{aligned}$$

Nakoľko sú súbory malé, teda platí $n_1 + n_2 = 11 + 9 = n < 30$, *je potrebné vypočítať tzv. spoločný výberový rozptyl*

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_1 - 1)\, S_{x_1}^2 + (n_2 + 1)\, S_{x_2}^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{10 \cdot 189.49 + 8 \cdot 56.\,94}{18} \\ &= 130.\,58, \end{aligned}$$

ktorý následne dosadíme do testovacej štatistiky

$$U = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{190.09 - 181.78}{\sqrt{130.\,58 \cdot \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9}\right)}} \doteq 1.62$$

a tú porovnáme s kritickou hodnotou

$$t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = t_{0.95}^{(18)} = 1.734.$$

A keďže platí

$$U = 1.62 \not> 1.734 = t_{0.95}^{(18)},$$

nezamietame ale prijímame hypotézu H_0, *teda rozdieľ stredných hodnôt nie je na danej hladine významnosti dostatočný, aby sme mohli tvrdtiť, že má prvý súbor väčšiu strednú hodnotu.*

Príklad 7 *Nasledujúce dva súbory*

$$\begin{aligned} A &= \langle 12, 14, 8, 6, 17, 8 \rangle \\ B &= \langle 13, 15, 7, 18, 15, 19, 10 \rangle \end{aligned}$$

porovnajme, teda otestujme hypotézy o zhode ich priemerov.

Testujeme proti sebe hypotézy

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2, \\ H_1 &: \mu_1 < \mu_2. \end{aligned}$$

Zrejme platí

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{1}{6}(12 + 14 + 8 + 6 + 17 + 8) \doteq 10.83, \\ \overline{x}_2 &= \frac{1}{7}(13 + 15 + 7 + 18 + 15 + 19 + 10) \doteq 13.86 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} S_{x_1}^2 &= \frac{1}{5}((12 - 10.83)^2 + (14 - 10.83)^2 + (8 - 10.83)^2 \\ &\quad + (6 - 10.83)^2 + (17 - 10.83)^2 + (8 - 10.83)^2) \\ &\doteq 17.77, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{x_2}^2 &= \frac{1}{6}((13-13.86)^2+(15-13.86)^2+(7-13.86)^2 \\
&\quad +(18-13.86)^2+(15-13.86)^2+(19-13.86)^2 \\
&\quad +(10-13.86)^2) \\
&\doteq 18.14,
\end{aligned}
$$

apreto spoločný výberový rozptyl je

$$
\begin{aligned}
S_p^2 &= \frac{(n_1-1)\,S_{x_1}^2+(n_2+1)\,S_{x_2}^2}{n_1+n_2-2} \\
&= \frac{5\cdot 17.77+6\cdot 18.14}{11} \doteq 17.\,97
\end{aligned}
$$

Testovacia štatistika má hodnotu

$$
U=\frac{\overline{x}_1-\overline{x}_2}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{10.83-13.86}{\sqrt{17.\,97\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}}\doteq -1.29.
$$

Túto porovnáme s kritickou hodnotou

$$
-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}=-t_{0.95}^{(11)}=-1.796.
$$

Platí

$$
U=-1.29\not< -1.796=-t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)},
$$

a teda hypotézu H_0 nezamietame, a zadané súbory majú na danej hladine významnosti rovnaké stredné hodnoty.