1 Kombinatorika

Množina prvkov

$$\{a, b, c\} = \{b, a, c\}.$$

Skupina prvkov

$$\langle a, a, a, b, b, c\rangle = \langle b, b, c, a, a, a\rangle.$$

Usporiadaná n-tica prvkov

$$(a, b, c, c) \neq (c, a, b, c).$$

1.1 Variácie bez opakovania

Definícia 1 *Variácie $k-$tej triedy z n prvkov bez opakovania nazývame usporiadané k-tice z n prvkovej množiny, pričom sa tieto neopakujú, ich početnosť je určená*

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Príklad 1 *Koľko štvorciferných čísel pričom sa jednotlivé číslice nesmú opakovať môžeme vytvoriť z číslic 1,2,3,4,5?*

Vidíme, že $k = 4$ a $n = 5$, a preto

$$V_4(5) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 120.$$

1.2 Variácie s opakovaním

Definícia 2 *Variácie $k-$tej triedy z n prvkov s opakovaním nazývame usporiadané k-tice z n prvkovej množiny, pričom sa tieto môžu opakovať, ich početnosť je určená*

$$V'_k(n) = n^k.$$

Príklad 2 *Koľko štvorciferných čísel pričom sa jednotlivé číslice môžu opakovať môžeme vytvoriť z číslic 1,2,3,4,5?*

$$V'_4(5) = 5^4 = 625.$$

1.3 Permutácie bez opakovania

Definícia 3 *Permutácie z n prvkov bez opakovania nazývame usporiadané n-tice vytvorené z n prvkovej množiny, ich početnosť je určená*

$$P(n) = n!.$$

Príklad 3 *Vytvorme všetky permutácie z prvkov a, b, c.*

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 = 6.$$

1.4 Permutácie s opakovaním

Definícia 4 *Permutácie z n prvkov s opakovaním nazývame usporiadané n-tice vytvorené z n prvkovej skupiny, pričom sa 1. prvok opakuje r_1 krát, 2. r_2 krát, až k-tý r_k krát, a ich početnosť je určená vzťahom*

$$P'_{r_1,r_2,\ldots,r_k}(n) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

Príklad 4 *Koľkými spôsobmi môžeme umiestniť vedľa seba dva červené, tri modré a štyri zelené poháre.*

$$P'_{2,3,4}(9) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260.$$

1.5 Kombinačné číslo

Definícia 5 *Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ (n nad k) rozumieme číslo definované vzťahom*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Vlastnosti kombinačného čísla

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n, \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = 1.
\end{aligned}$$

1.5.1 Kombinácie bez opakovania

Definícia 6 *Kombinácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania, nazývame k-prvkové podmnožiny (žiadny prvok sa neopakuje) z n-prvkovej množiny. Ich početnosť je určená vzťahom*

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Príklad 5 *Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť štvorčlennú delegáciu z dvanástich ľudí?*

$$\begin{aligned}
C_4(12) &= \binom{12}{4} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 4!} \\
&= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.
\end{aligned}$$

1.5.2 Kombinácie s opakovaním

Definícia 7 *Kombinácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním, nazývame k-prvkové skupiny (prvky sa môžu opakovať) z n-prvkovej množiny. Ich početnosť je určená vzťahom*

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Príklad 6 *V predajni majú sedem druhov piva, koľkými spôsobmi môžeme vybrať 15 kusovú sadu z týchto pív?*

$$C'_{15}(7) = \binom{7+15-1}{15} = \binom{21}{15} = 54\,264.$$