12 Numerické riešenie ODR - Cauchyho počiatočná úloha

Príklad 1 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu*

$$y' = \frac{5x^2 - y}{e^{x+y}},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 1,$$

s krokom $h = 0.2$ na intervale $[0,1]$:

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *modifikovanou Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 2. rádu),*

c) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Pre $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$ a $F(x,y) = \frac{5x_i^2 - y_i}{e^{x_i+y_i}}$ vypočítame podľa vzťahu*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + 0.2 \cdot \frac{5x_i^2 - y_i}{e^{x_i+y_i}},$$

pre $i = 0,1,2,3,4,5$. Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
y_i	1.0000	0.9264	0.8793	0.8749	0.9172	0.9992

b) *Použijeme prvú modifikovanú Eulerovu metódu*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2. \end{aligned}$$

pre $i = 0,1,2,3,4,5$. Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2364	−0.0295	0.1899	0.3720	
k_2	−0.3154	−0.1377	0.0842	0.2904	0.4433	
y_i	1.0000	0.9369	0.9094	0.9262	0.9843	1.0730

a použitím druhej modifikovanej Eulerovej metódy

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h \cdot (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2366	−0.0305	0.1883	0.3705	
k_2	−0.2355	−0.0254	0.1977	0.3810	0.5014	
y_i	1.0000	0.9397	0.9135	0.9302	0.9871	1.0743

c) *Vzťah pre metódu Rungeho-Kutta 4. rádu je*

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F\left(x_i, y_i\right), \\
k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\
k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right), \\
k_4 &= F\left(x_i + h, y_i + h \cdot k_3\right), \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),
\end{aligned}
$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2365	−0.0298	0.1897	0.3723	
k_2	−0.3154	−0.1378	0.0838	0.2902	0.4436	
k_3	−0.3155	−0.1394	0.0801	0.2853	0.4394	
k_4	−0.2364	−0.0297	0.1898	0.3723	0.4949	
y_i	1.0000	0.9378	0.9104	0.9267	0.9838	1.0716

Príklad 2 *Metódou Rungeho-Kutta 4. rádu riešme sústavu*

$$
\begin{aligned}
x' &= y, \\
y' &= -x - 2\mathrm{e}^t + 1, \\
z' &= -x - \mathrm{e}^t + 1,
\end{aligned}
$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $t \in [0, 1]$ *s počiatočnými podmienkami*

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 1, \\
y(0) &= 0, \\
z(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

Zrejme máme

$$
\begin{aligned}
F_1(t, x, y, z) &= y, \\
F_2(t, x, y, z) &= -x - 2\mathrm{e}^t + 1, \\
F_3(t, x, y, z) &= -x - \mathrm{e}^t + 1,
\end{aligned}
$$

a teda pre približné riešenie metódy Rungeho-Kutta 4. rádu bude platiť

$$\begin{aligned}
k_1 &= F_1\left(t_i, x_i, y_i, z_i\right) = y_i, \\
l_1 &= F_2\left(t_i, x_i, y_i, z_i\right) = -x_i - 2\mathrm{e}^{t_i} + 1, \\
m_1 &= F_3\left(t_i, x_i, y_i, z_i\right) = -x_i - \mathrm{e}^{t_i} + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= F_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1, y_i + \frac{h}{2}l_1, z_i + \frac{h}{2}m_1\right), \\
l_2 &= F_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1, y_i + \frac{h}{2}l_1, z_i + \frac{h}{2}m_1\right), \\
m_2 &= F_3\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1, y_i + \frac{h}{2}l_1, z_i + \frac{h}{2}m_1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= F_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2, y_i + \frac{h}{2}l_2, z_i + \frac{h}{2}m_2\right), \\
l_3 &= F_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2, y_i + \frac{h}{2}l_2, z_i + \frac{h}{2}m_2\right), \\
m_3 &= F_3\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2, y_i + \frac{h}{2}l_2, z_i + \frac{h}{2}m_2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= F_1\left(t_i + h, x_i + h \cdot k_3, y_i + h \cdot l_3, z_i + h \cdot m_3\right), \\
l_4 &= F_2\left(t_i + h, x_i + h \cdot k_3, y_i + h \cdot l_3, z_i + h \cdot m_3\right), \\
m_4 &= F_3\left(t_i + h, x_i + h \cdot k_3, y_i + h \cdot l_3, z_i + h \cdot m_3\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}h \cdot \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot \left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right), \\
z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}h \cdot \left(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4\right).
\end{aligned}$$

Riešenie zapíšeme do tabuľky

t	x_i	y_i	z_i
0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
0.1000	0.9897	−0.2100	0.8952
0.2000	0.9573	−0.4400	0.7814
0.3000	0.9010	−0.6900	0.6598
0.4000	0.8187	−0.9602	0.5316
0.5000	0.7083	−1.2506	0.3982
0.6000	0.5679	−1.5614	0.2607
0.7000	0.3953	−1.8931	0.1206
0.8000	0.1885	−2.2462	−0.0206
0.9000	−0.0547	−2.6213	−0.1617
1.0000	−0.3365	−3.0194	−0.3012

Príklad 3 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' + 2y = x^3 \mathrm{e}^{-2x},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 1,$$

s krokom $h = 0.2$ *na intervale* $[0, 1]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *modifikovanou Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 2. rádu),*

c) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Určujúcou funkciou pre zadanú Cauchyho počiatočnú úlohu je zrejme*

$$y' = F(x, y) = -2y + x^3 \mathrm{e}^{-2x}.$$

Vzťah pre Eulerovu metódu je

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + 0.2 \cdot \left(-2y_i + x_i^3 \mathrm{e}^{-2x_i}\right),$$

a pre sieť uzlových bodov $x_i = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ *vypočítané odhady riešenia zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.0000	0.6000	0.3611	0.2224	0.1464	0.1085

b) *Prvá modifikovaná Eulerova metóda je určená vzťahom*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2 \end{aligned}$$

a priebežné ako aj celkové výsledky opäť zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	-2	-1.3550	-0.9018	-0.5838	-0.3665	
k_2	1.5992	-1.0745	-0.7042	-0.4475	-0.2760	
y_i	1.0000	0.6802	0.4653	0.3244	0.2349	0.1797

a druhá modifikovaná Eulerova metóda je určená vzťahom

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h \cdot (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

a opäť výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	-2.0000	-1.3557	-0.9032	-0.5851	-0.3672	
k_2	-1.1946	-0.7900	-0.5056	-0.3128	-0.1884	
y_i	1.0000	0.6805	0.4660	0.3251	0.2353	0.1797

c) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right) \\ k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right) \\ k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

výsledky sú v tabuľke

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	-2.0000	-1.3360	-0.8759	-0.5571	-0.3420	
k_2	-1.5992	-1.0593	-0.6835	-0.4261	-0.2564	
k_3	-1.6793	-1.1147	-0.7219	-0.4523	-0.2735	
k_4	-1.3229	-0.8667	-0.5508	-0.3378	-0.2006	
y_i	1.0000	0.6707	0.4523	0.3111	0.2227	0.1693

Príklad 4 *Metódou Rungeho-Kutta riešme*

$$y'' = \left(1 - y^2\right) \cdot y' - y,$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $[0, 0.5]$.

Diferenciálnu rovnicu druhého rádu si transformujeme na sústavu dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \left(1 - y_1^2\right) \cdot y_2 - y_1, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2, \\ y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

a pre funkcie

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2) &= y_2, \\ F_2(x, y_1, y_2) &= \left(1 - y_1^2\right) \cdot y_2 - y_1, \end{aligned}$$

dostávame výsledky, ktoré zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1_i}	2.0000	1.9909	1.9811	1.9705	1.9589	1.9464
y_{2_i}	0.0000	−0.0091	−0.0189	−0.0295	−0.0411	−0.0536

Príklad 5 *Metódou Rungeho-Kutta riešme*

$$y'' + y' - 6y = 0,$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 3, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $[0, 0.5]$.

Zadanú dif. rovnicu 2. rádu

$$y'' = -y' + 6y,$$

transformujeme na sústavu dif. rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_2 + 6y_1, \end{aligned}$$

a teda pre dve rovnice

$$\begin{aligned} y_1' &= F(x, y_1, y_2) = y_2, \\ y_2' &= G(x, y_1, y_2) = -y_2 + 6y_1, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 3, \\ y_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$\begin{aligned} k_1 &= F\left(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}\right), \\ l_1 &= G\left(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\ l_2 &= G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\ l_3 &= G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= F\left(x_i + h, y_{1_i} + hk_3, y_{2_i} + hl_3\right), \\ l_4 &= G\left(x_i + h, y_{1_i} + hk_3, y_{2_i} + hl_3\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1_{i+1}} &= y_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_{2_{i+1}} &= y_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1_i}	3.0000	3.1836	3.5325	4.0508	4.7523	5.6597
y_{2_i}	1.0000	2.6631	4.3208	6.0686	7.9984	10.2035

Príklad 6 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' = y - t^2 + 1,$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 0.5,$$

s krokom $h = 0.5$ *na intervale* $[0, 2]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Pre zadaní interval* $[0, 2]$ *a krok vytvoríme sieť uzlových bodov*

$$t_i = \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\},$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$*. Eulerova metóda je určená vzťahom*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(t_i, y_i) = y_i + 0.5 \cdot \left(y_i - t_i^2 + 1\right).$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
t_i	0.0	0.5	1	1.5	2.0
y_i	0.5000	1.2500	2.2500	3.3750	4.4375

b) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu je podobne určená vzťahmi*

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F\left(t_i, y_i\right), \\
k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\
k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right), \\
k_4 &= F\left(t_i + h, y_i + h \cdot k_3\right), \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),
\end{aligned}
$$

výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
t_i	0.0000	0.5	1	1.5	2.0000
k_1	1.5000	2.1751	2.6396	2.7568	
k_2	1.8125	2.4064	2.7370	2.6335	
k_3	1.8906	2.4642	2.7614	2.6027	
k_4	2.1953	2.6572	2.7703	2.3082	
y_i	0.5000	1.4251	2.6396	4.0068	5.3016

Príklad 7 *Metódou Rungeho-Kutta riešme*

$$y'' + y \cdot y' + 3y = \sin t,$$

s počiatočnými podmienkami

$$
\begin{aligned}
y\left(0\right) &= -1, \\
y'\left(0\right) &= 1,
\end{aligned}
$$

s krokom $h = 0.2$ na intervale $\left[0, 20\right]$.

Dif. rovnicu druhého rádu si transformujeme na sústavu dvoch dif. rovníc prvého rádu pomocou substitúcie

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y'.$$

To znamená, že riešime sústavu

$$
\begin{aligned}
u_1' &= F\left(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}\right) = u_2, \\
u_2' &= G\left(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}\right) = -u_1 \cdot u_2 - 3u_1 + \sin t,
\end{aligned}
$$

s počiatočnými podmienkami

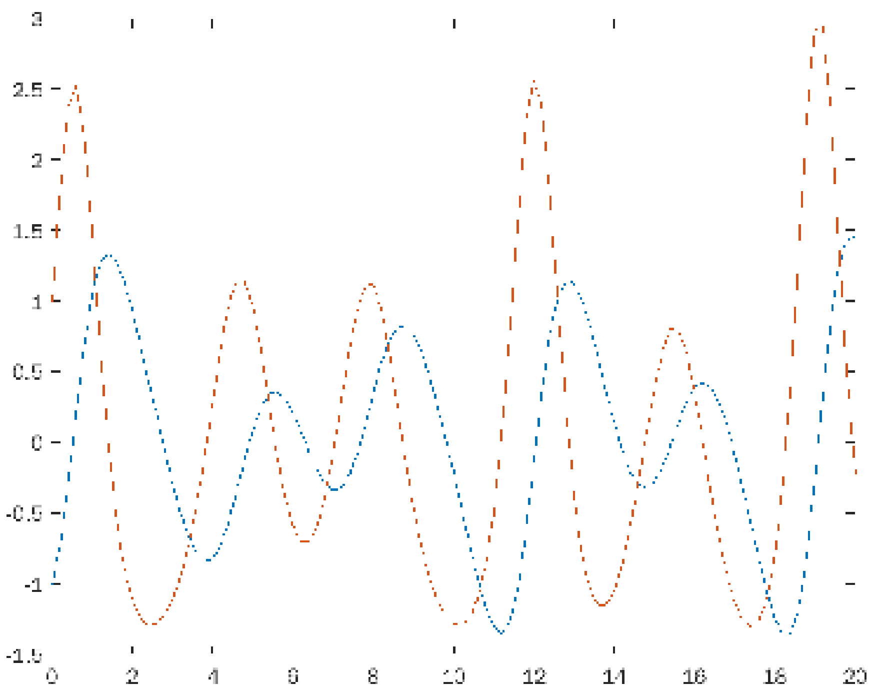
$$
\begin{aligned}
u_1\left(0\right) &= -1, \\
u_2\left(0\right) &= 1.
\end{aligned}
$$

Túto riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F\left(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}\right), \\
l_1 &= G\left(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\
l_2 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\
\\
k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\
l_3 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\
\\
k_4 &= F\left(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3\right), \\
l_4 &= G\left(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3\right), \\
\\
u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).
\end{aligned}
$$

Výsledok vidíme na obrázku



Príklad 8 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' = \frac{y \ln y}{x},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(2) = \mathrm{e},$$

pre 5 krokov na intervale $[2, \mathrm{e}]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Eulerova metóda na riešenie ODE má tvar*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + h \cdot \frac{y_i \ln y_i}{x_i},$$

pre zadaný počet krokov a interval $[2, \mathrm{e}]$ *určíme sieť uzlových bodov a získané výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2.0000	2.1437	2.2873	2.4310	2.5746	2.7183
y_i	2.7183	2.9135	3.1223	3.3456	3.5844	3.8397

b) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu je podobne určená vzťahmi*

$$\begin{aligned}
k_1 &= F(x_i, y_i), \\
k_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\
k_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right), \\
k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
\end{aligned}$$

výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2.0000	2.1437	2.2873	2.4310	2.5746	2.7183
k_1	1.3591	1.4604	1.5691	1.6860	1.8115	
k_2	1.4071	1.5119	1.6246	1.7456	1.8757	
k_3	1.4105	1.5155	1.6283	1.7495	1.8797	
k_4	1.4605	1.5693	1.6862	1.8117	1.9466	
y_i	2.7183	2.9207	3.1382	3.3719	3.6230	3.8928

Príklad 9 *Metódou Rungeho-Kutta riešme na intervale* $[0, 1]$ *s krokom* $h = 0.1$ *dif. rovnicu*

$$\begin{aligned}
y'' + 4y' + 5y &= 10\mathrm{e}^t, \\
y(0) &= 1, \\
y'(0) &= 2.
\end{aligned}$$

Preznačením

$$\begin{aligned} u_1 &= y, \\ u_2 &= y', \end{aligned}$$

transformujeme zadanú dif. rovnicu druhého rádu na sústavu dif. rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} u_1' &= F(t, y, y') = F(t, u_1, u_2) = u_2, \\ u_2' &= y'' = G(t, y, y') = G(t, u_1, u_2) = -4u_2 - 5u_1 + 10\mathrm{e}^t, \\ u_1(0) &= 1, \\ u_2(0) &= 2. \end{aligned}$$

Túto sústavu riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}), \\ l_1 &= G(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\ l_2 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\ l_3 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= F(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3), \\ l_4 &= G(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Riešeniím je vektor $y = u_1$, ktorý uvádzame v tabulke

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1.0000	1.1869	1.3546	1.5120	1.6668	1.8251	1.9922	2.1726	2.3703	2.5891	2.8321