11 Numerické integrovanie

Príklad 1 *Vypočítajme hodnotu určitého integrálu*

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$$

a) *lichobežníkovou metódou pre $m = 8$,*

b) *Simpsonovou metódou $m = 8$.*

a) *Vypočítame pomocou vzťahu pre lichobežníkovú metódu, kde šírka podintervalu*

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-(-2)}{8} = \frac{4}{8} = 0.5.$$

A preto

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x \quad &\approx \quad h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) \right. \\
&\qquad \left. + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + \frac{1}{2} \cdot f(x_8) \right) \\
&= \quad 0.5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(-2) + f(-1.5) + f(-1) + f(-0.5) + f(0) \right. \\
&\qquad \left. + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \frac{1}{2} \cdot f(2) \right) \\
&= \quad 0.5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{(-2)^2} + \mathrm{e}^{(-1.5)^2} + \mathrm{e}^{(-1)^2} + \mathrm{e}^{(-0.5)^2} + \mathrm{e}^{(0)^2} \right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{e}^{(0.5)^2} + \mathrm{e}^{(1)^2} + \mathrm{e}^{(1.5)^2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{(2)^2} \right) \\
&\doteq \quad 41.289.
\end{aligned}$$

b) *Dosadíme do vzťahu pre Simpsonovo pravidlo*

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x &\approx \frac{h}{3} \cdot \Big(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) \\
&\quad + 4 \cdot f(x_5) + 2 \cdot f(x_6) + 4 \cdot f(x_7) + f(x_8) \Big) \\
&= \frac{0.5}{3} \cdot \Big(f(-2) + 4 \cdot f(-1.5) + 2 \cdot f(-1) + 4 \cdot f(-0.5) + 2 \cdot f(0) \\
&\quad + 4 \cdot f(0.5) + 2 \cdot f(1) + 4 \cdot f(1.5) + f(2) \Big) \\
&= \frac{0.5}{3} \cdot \Big(\mathrm{e}^{(-2)^2} + 4 \cdot \mathrm{e}^{(-1.5)^2} + 2 \cdot \mathrm{e}^{(-1)^2} + 4 \cdot \mathrm{e}^{(-0.5)^2} + 2 \cdot \mathrm{e}^{(0)^2} \\
&\quad + 4 \cdot \mathrm{e}^{(0.5)^2} + 2 \cdot \mathrm{e}^{(1)^2} + 4 \cdot \mathrm{e}^{(1.5)^2} + \mathrm{e}^{(2)^2} \Big) \\
&\doteq 34.\,707
\end{aligned}$$

Príklad 2 *Pomocou lichobežníkovej a Simpsonovej metódy nájdime približnú hodnotu určitého integrálu*

$$\int_{0}^{8} \sqrt{x} \mathrm{d}x,$$

pre počet uzlových bodov $m = 8$.

Najskôr si určíme šírku ekvidištančného kroku, t. j.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{8-0}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Získali sme teda sieť uzlových bodov

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Určíme odhad integrálu pomocou zloženého lichobežníkového pravidla

$$
\begin{aligned}
L &= h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right.\\
&\qquad \left.+f\left(x_5\right)+f\left(x_6\right)+f\left(x_7\right)+\frac{1}{2}\cdot f\left(x_8\right)\right)\\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\right.\\
&\qquad \left.+f(5)+f(6)+f(7)+\frac{1}{2}\cdot f(8)\right)\\
&= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right.\\
&\qquad \left.+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\right)\\
&= 14.892.
\end{aligned}
$$

Pomocou zloženého Simpsonovho pravidla je odhad určitého integrálu daný

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{h}{3}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4\cdot f\left(x_1\right)+2\cdot f\left(x_2\right)+4\cdot f\left(x_3\right)+2\cdot f\left(x_4\right)\right.\\
&\qquad \left.+4\cdot f\left(x_5\right)+2\cdot f\left(x_6\right)+4\cdot f\left(x_7\right)+f\left(x_8\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(f(0)+4\cdot f(1)+2\cdot f(2)+4\cdot f(3)+2\cdot f(4)\right.\\
&\qquad \left.+4\cdot f(5)+2\cdot f(6)+4\cdot f(7)+f(8)\right)\\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{0}+4\sqrt{1}+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{4}\right.\\
&\qquad \left.+4\sqrt{5}+2\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{8}\right)\\
&= 15.004.
\end{aligned}
$$

Pre porovnanie skutočná presná hodnota určitého integrálu je

$$
\begin{aligned}
\int_0^8 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8^3}-0\right) = \frac{2}{3}\sqrt{2^9}\\
&= \frac{2}{3}\cdot 2^4\sqrt{2} = \frac{2}{3}\cdot 16\sqrt{2} = 15.085.
\end{aligned}
$$

Príklad 3 *Vypočítajme hodnotu určitého integrálu*

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x$$

a) *obdĺžnikovou metódou pre $m = 6$,*

b) *lichobežníkovou metódou pre $m = 6$,*

c) *Simpsonovou metódou $m = 6$.*

Najskôr si určíme šírku podintervalu

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6},$$

a teda uzlovými bodmi sú hodnoty (sieť)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6} = \pi$

a k nim prislúchajúce funkčné hodnoty sú

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = \sin^2 0 = (\sin 0)^2 = 0^2 = 0, \\
f(x_1) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
f(x_2) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \\
f(x_3) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1, \\
f(x_4) &= f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2 \frac{2\pi}{3} = \left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \\
f(x_5) &= f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin^2 \frac{5\pi}{6} = \left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\
f(x_6) &= f(\pi) = \sin^2 \pi = (\sin \pi)^2 = 0^2 = 0,
\end{aligned}$$

a) *Obdĺžnikovým pravidlom odhadneme hodnotu integrálu*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x &\approx O = \sum_{i=0}^{m-1} h \cdot f(x_i) \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)) \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi \doteq 1.571.
\end{aligned}$$

b) *Lichobežníkovým pravidlom odhadneme hodnotu integrálu*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x &\approx L = h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2} \cdot f(x_m)\right) \\
&= h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2} \cdot f(x_m)\right) \\
&= \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi \overset{\circ}{=} 1.571.
\end{aligned}$$

c) *Pomocou Simpsonovho pravidla bude odhad hodnoty integrálu*

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x &\approx S = \frac{h}{3} \cdot \Big(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) \\
&\qquad + 2 \cdot f(x_4) + 4 \cdot f(x_5) + f(x_6) \Big) \\
&= \frac{\frac{\pi}{6}}{3} \cdot \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 4 . \frac{1}{4} + 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi \overset{\circ}{=} 1.571.
\end{aligned}$$

Pre porovnanie skutočná hodnota určitého integrálu je

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi - \underbrace{\frac{\sin 2\pi}{2}}_{=0} - \left(0 - \underbrace{\frac{\sin 0}{2}}_{=0}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Príklad 4 *Vypočítajme hodnotu určitého integrálu*

$$\int_{-1}^3 2^x \mathrm{d}x$$

a) *obdĺžnikovou metódou pre $m = 4$,*

b) *lichobežníkovou metódou pre $m = 4$,*

c) *Simpsonovou metódou $m = 4$.*

Najskôr si určíme šírku podintervalu

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-(-1)}{4} = 1.$$

Rozdelíme si daný interval na podintetervali pomocou uzlových bodov (siete) a nájdeme v nich funkčné hodnoty

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i) = 2^{x_i}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

a) *Obdĺžnikovým pravidlom dostávame odhad*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} 2^x \mathrm{d}x &\approx O = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \cdot h = h \cdot (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + 2 + 4\right) \doteq \frac{15}{2} = 7.5.\end{aligned}$$

b) *Lichobežníkové pravidlo nám dáva výsledok odhadu*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} 2^x \mathrm{d}x &\approx L = h\left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{1}{2} \cdot f(x_m)\right) \\ &= h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2} \cdot f(x_4)\right) \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \frac{1}{2} \cdot 8\right) \doteq \frac{45}{4} = 11.25.\end{aligned}$$

c) *Simpsonovým pravidlom dostaneme odhad*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} 2^x \mathrm{d}x &\approx S = \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=2}^{m-2} f(x_{2i}) + f(x_m)\right) \\ &= \frac{h}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 8\right) \doteq \frac{65}{6} = 10.833.\end{aligned}$$

Pre porovnanie skutočná hodnota určitého integrálu je

$$\int_{-1}^{3} 2^x \mathrm{d}x = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{\ln 2}\left(2^3 - 2^{-1}\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(8 - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2\ln 2} = 10.82.$$

Príklad 5 *Vypočítajme minimálny počet uzlových bodov lichobežníkovú metódu na riešenie integrálu*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

ak pripúšťame maximálnu chybu $\varepsilon = 0.005$ *a tento integrál pomocou tejto metódy odhadnime.*

Pre odhad chyby lichobežníkovej metódy platí

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^3}{12\cdot m^2}M_2,$$

kde $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. *Nakoľko pre druhú deriváciu*

$$f''(x) = \left(4x^2-2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

na intervale $x \in [0,1]$ *platí*

$$|f''(x)| = \left|\left(4x^2-2\right)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\right| \leq 2 = M_2.$$

A teda pre požadovanú presnosť musí platiť

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \frac{(b-a)^3}{12\cdot m^2}M_2,\\
0.005 &> \frac{(1-0)^3}{12\cdot m^2}2,\\
0.005 &> \frac{2}{12\cdot m^2},\\
0.005 &> \frac{1}{6\cdot m^2},\\
m^2 &> \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{0.005} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{5}{1000}} = \frac{1000}{30},\\
m &> \sqrt{\frac{1000}{30}} \doteq 5.77.
\end{aligned}$$

A teda pre požadovanú presnosť musí byť počet uzlových bodov minimálne $m = 6$.

Vytvoríme si sieť pomocou uzlových bodov tak, že rozdelíme pomocou nich interval $[a,b] = [0,1]$ *na 6 rovnakých podintervalov dĺžky*

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6},$$

čiže

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}=1$

a hľadaný odhad bude

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &\approx L = h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+\frac{1}{2}\cdot f(x_n)\right)\\
&= h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right.\\
&\qquad \left.+f(x_4)+f(x_5)+\frac{1}{2}\cdot f(x_6)\right)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-0^2}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{6}\right)^2}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{3}{6}\right)^2}\right.\\
&\qquad \left.+\mathrm{e}^{-\left(\frac{4}{6}\right)^2}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{5}{6}\right)^2}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-1^2}\right)\\
&\doteq 0.745.
\end{aligned}
$$

Príklad 6 *Vypočítajme minimálny počet uzlových bodov Simpsonovou metódu na riešenie integrálu*

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

ak pripúšťame maximálnu chybu $\varepsilon = 0.001$ *a tento integrál pomocou tejto metódy odhadnime.*

Pre odhad chyby Simpsonovej metódy platí

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^5}{90\cdot m^4}M_4,$$

kde $M_4 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$. *Nakoľko pre druhú deriváciu*

$$f^{(4)}(x) = \left(16x^4-48x^2+12\right)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

na intervale $x\in[0,1]$ *platí*

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|\left(16x^4-48x^2+12\right)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\right| \le 12 = M_4.$$

A teda pre požadovanú presnosť musí platiť

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \frac{(b-a)^5}{90\cdot m^4}M_4,\\
0.001 &> \frac{(1-0)^5}{90\cdot m^4}\cdot 12,\\
0.001 &> \frac{1}{90\cdot m^4}\cdot 12,\\
m^4 &> \frac{1}{90\cdot 0.001}\cdot 12 \doteq 133.33,\\
m &> \sqrt[4]{66.667} = 3.398\,1.
\end{aligned}$$

A teda najbližšie párne celé číslo je $m = 4$ a pre šírku podintervalu

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4},$$

sieť

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	$\frac{1}{4}=0.25$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{3}{4}=0.75$	$\frac{4}{4}=1$

Odhad Simpsomnovou metódou je

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &\approx S = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4\cdot\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i-1})+2\cdot\sum_{i=2}^{m-2} f(x_{2i})+f(x_m)\right)\\
&= \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4\cdot f(x_1)+2\cdot f(x_2)+4\cdot f(x_3)+f(x_4)\right)\\
&= \frac{\frac{1}{4}}{3}\cdot\left(\mathrm{e}^{-0^2}+4\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4}\right)^2}+2\mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{4}\right)^2}+4\mathrm{e}^{-\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\mathrm{e}^{-1^2}\right)\\
&\doteq 0.747.
\end{aligned}$$