10 Aproximácia a interpolácia funkcie

Príklad 1 *Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu zadanú tabuľkou*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	1	4	5	8
$f(x_i):$	10	12	13	9

Lagrangeov interpolačný polynóm zostrojíme ako lineárnu kombináciu

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot l_{3,i}(x)$$

funkčných hodnôt a elementárnych Lagrangeových polynómov tvaru

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},$$

pre $i = 0,\ldots,n = 3$. *Tieto sú v našom prípade rovné*

$$\begin{aligned}
l_{3,0}(x) &= \frac{(x-4)(x-5)(x-8)}{(1-4)(1-5)(1-8)} = -\frac{1}{84}(x-4)(x-5)(x-8),\\
l_{3,1}(x) &= \frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{(4-1)(4-5)(4-8)} = \frac{1}{12}(x-1)(x-5)(x-8),\\
l_{3,2}(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(5-1)(5-4)(5-8)} = -\frac{1}{12}(x-1)(x-4)(x-8),\\
l_{3,3}(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(8-1)(8-4)(8-5)} = \frac{1}{84}(x-1)(x-4)(x-5),
\end{aligned}$$

a preto hľadaný Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= 10\cdot\left(-\frac{1}{84}(x-4)(x-5)(x-8)\right) + 12\cdot\frac{1}{12}(x-1)(x-5)(x-8)\\
&\quad +13\cdot\left(-\frac{1}{12}(x-1)(x-4)(x-8)\right) + 9\cdot\frac{1}{84}(x-1)(x-4)(x-5)\\
&= -\frac{2}{21}x^3 + \frac{29}{28}x^2 - \frac{211}{84}x + \frac{81}{7}.
\end{aligned}$$

Príklad 2 *Pre tie isté hodnoty nájdime Newtonov interpolačný polynóm*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	1	4	5	8
$f(x_i):$	10	12	13	9

Do tabuľky si zapíšeme príslušné pomerné diferencie jednotlivých rádov

$i:$	x_i	$y_i = f(x_i)$	$\underbrace{f[x_{i+1}, x_i]}_{\textit{pomerná diferencia 1. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]}_{\textit{pomerná dif. 2. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+3}, x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]}_{\textit{pomerná dif. 3. rádu}}$
0	1	$\boxed{10}$	$\frac{12-10}{4-1} = \boxed{\frac{2}{3}}$	$\frac{1-\frac{2}{3}}{5-1} = \boxed{\frac{1}{12}}$	$\frac{-\frac{7}{12}-\frac{1}{12}}{8-1} = \boxed{-\frac{2}{21}}$
1	4	12	$\frac{13-12}{5-4} = 1$	$\frac{-\frac{4}{3}-1}{8-4} = -\frac{7}{12}$	
2	5	13	$\frac{9-13}{8-5} = -\frac{4}{3}$		
3	8	9			

A teda pre Newtonov interpolačný polynóm platí

$$
\begin{aligned}
N_3(x) &= 10 + \frac{2}{3} \cdot (x-1) + \frac{1}{12} \cdot (x-1)(x-4) + \left(-\frac{2}{21}\right) \cdot (x-1)(x-4)(x-5) \\
&= -\frac{2}{21}x^3 + \frac{29}{28}x^2 - \frac{211}{84}x + \frac{81}{7}.
\end{aligned}
$$

Príklad 3 *Metódou najmenších štvorcov nájdite exponenciálnu funkciu, ktorá najlepšie aproximuje hordnoty dané tabuľkou*

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	2.0774	1.4509
1	2.3049	2.8462
2	3.0125	2.1536
3	4.7092	4.7438
4	5.5016	7.7260

Exponenciálnu funkciu

$$
y = A \cdot \mathrm{e}^{Bx},
$$

aporoximujeme metódou najmenších štvorcov najjednoduchšie tak, že si pôvodný zápis zlogaritmujeme a úpravou dostaneme

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(A \cdot \mathrm{e}^{Bx}\right), \\
\ln y &= \ln A + \ln \mathrm{e}^{Bx}, \\
\ln y &= \ln A + Bx \cdot \underbrace{\ln \mathrm{e}}_{=1}, \\
\ln y &= \underbrace{\ln A}_{\textit{ozn. } a} + B \cdot x
\end{aligned}
$$

čo je v podstata rovnica priamky, pre ktorú budeme neznáme paramatre a a B *hľadať podľa*

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \ln y_i \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \ln y_i}{(n+1) \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)^2} \\
&= \frac{5.8 \cdot 71.15 - 17.61 \cdot 24.15}{5 \cdot 71.15 - (17.61)^2} \doteq -0.28, \\
B &= \frac{(n+1) \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \ln y_i - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \ln y_i}{(n+1) \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i\right)^2} \\
&= \frac{5 \cdot 24.15 - 17.61 \cdot 5.8}{5 \cdot 71.15 - (17.61)^2} \doteq 0.41,
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
n+1 &= 5, \\
\sum_{i=0}^{n} x_i &\doteq 17.61, \\
\sum_{i=0}^{n} x_i^2 &\doteq 71.15, \\
\sum_{i=0}^{n} \ln y_i &\doteq 5.80, \\
\sum_{i=0}^{n} x_i \ln y_i &\doteq 24.15.
\end{aligned}
$$

Čiže $A = \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-0.28} \doteq 0.76$ *(keďže* $a = \ln A$*) a hľadaná exponenciálna funkcia má tvar*

$$y = A \cdot \mathrm{e}^{Bx} = 0.76 \cdot \mathrm{e}^{0.41x}.$$

Príklad 4 *Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu zadanú v tabuľke*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	-1	0	3	7
$f(x_i):$	4	5	8	9

Lagrangeov interpolačný polynóm zostrojíme ako lineárnu kombináciu

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot l_{3,i}(x)$$

funkčných hodnôt a elementárnych Lagrangeových polynómov

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)},$$

pre $i = 0,\ldots,n = 3$. *V našom prípade teda elementárne Lagrangeove polynómy majú tvar*

$$\begin{aligned}
l_{3,0}(x) &= \frac{(x-0)\cdot(x-3)\cdot(x-7)}{(-1-0)\cdot(-1-3)\cdot(-1-7)} = -\frac{1}{32}x(x-3)(x-7),\\
l_{3,1}(x) &= \frac{(x-(-1))\cdot(x-3)\cdot(x-7)}{(0-(-1))\cdot(0-3)\cdot(0-7)} = \frac{1}{21}(x+1)(x-3)(x-7),\\
l_{3,2}(x) &= \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-7)}{(3-(-1))\cdot(3-0)\cdot(3-7)} = -\frac{1}{48}x(x+1)(x-7),\\
l_{3,3}(x) &= \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)\cdot(x-3)}{(7-(-1))\cdot(7-0)\cdot(7-3)} = \frac{1}{224}x(x+1)(x-3),
\end{aligned}$$

a teda celkovo Lagrangeov interpolačný polynóm bude

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_{4,i}(x) = \\
&= 4\cdot\left(-\frac{1}{32}x(x-3)(x-7)\right) + 5\cdot\frac{1}{21}(x+1)(x-3)(x-7)\\
&\quad +8\cdot\left(-\frac{1}{48}x(x+1)(x-7)\right) + 9\cdot\frac{1}{224}x(x+1)(x-3)\\
&= -\frac{3}{224}x^3 + \frac{3}{112}x^2 + \frac{233}{224}x + 5.
\end{aligned}$$

Príklad 5 *Pre tie isté hodnoty nájdime Newtonov interpolačný polynóm:*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	-1	0	3	7
$f(x_i):$	4	5	8	9

Do tabuľky si zaznačíme príslušné pomerné diferencie každého rádu

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$\underbrace{f[x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná diferencia 1. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+2},x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná dif. 2. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+3},x_{i+2},x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná dif. 3. rádu}}$
0	-1	$\boxed{4}$	$\frac{5-4}{0-(-1)} = \boxed{1}$	$\frac{1-1}{3-(-1)} = \boxed{0}$	$\frac{-\frac{3}{28}-0}{7-(-1)} = \boxed{-\frac{3}{224}}$
1	0	5	$\frac{8-5}{3-0} = 1$	$\frac{\frac{1}{4}-1}{7-0} = -\frac{3}{28}$	
2	3	8	$\frac{9-8}{7-3} = \frac{1}{4}$		
3	7	9			

Čiže pre Newtonov interpolačný polynóm platí

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 4 + 1 \cdot (x - (-1)) + 0 \cdot (x - (-1))(x - 0) \\ &\quad + \left(-\frac{3}{224}\right) \cdot (x - (-1))(x - 0)(x - 3) \\ &= -\frac{3}{224}x^3 + \frac{3}{112}x^2 + \frac{233}{224}x + 5. \end{aligned}$$

Príklad 6 *Metódou najmenších štvorcov nájdite mocninovú funkciu, ktorá najlepšie aproximuje hodnoty dané tabuľkou*

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	1.027
1	3	28.562
2	6	220.220
3	7	350.123

Aproximujeme mocninovú funkciu

$$y = A \cdot x^B,$$

kde neznáme parametre vypočítame podľa vzťahu

$$\begin{aligned} B &= \frac{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i \cdot \ln y_i) - \sum_{i=0}^{n} \ln x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} \ln y_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right)^2} \\ &= \frac{4 \cdot 24.75 - 4.84 \cdot 14.63}{4 \cdot 8.20 - (4.84)^2} \doteq 3.01, \\ a &= \frac{\sum_{i=0}^{n} \ln y_i - B \cdot \sum_{i=0}^{n} \ln x_i}{(n+1)} = \frac{14.63 - 3.01 \cdot 4.84}{4} = 0.015\,4, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \ln x_i &\doteq 4.84, \\ \sum_{i=0}^{n} \ln y_i &\doteq 14.63, \\ \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i \cdot \ln y_i) &\doteq 24.75, \\ \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 &\doteq 8.20. \end{aligned}$$

Čiže $A = \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{0.015\,4} \doteq 1.016$ *(lebo* $a = \ln A \Leftrightarrow A = \mathrm{e}^a$*) a hľadaná mocninová funkcia má tvar*

$$y = A \cdot x^B = 1.016 \cdot \mathrm{e}^{3.01}.$$

Príklad 7 *Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu zadanú v tabuľke:*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	5	6	9	11
$f(x_i):$	12	13	14	16

Lagrangeov interpolačný polynóm zostrojíme ako lineárnu kombináciu

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \cdot l_{3,i}(x)$$

funkčných hodnôt a ***elementárnych Lagrangeových interpolačný polynómov***

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}.$$

Čiže v našom prípade sú elementárne Lagrangeove interpolačný polynómy

$$\begin{aligned}
l_{3,0}(x) &= \frac{(x-6)(x-9)(x-11)}{(5-6)(5-9)(5-11)} = -\frac{1}{24}(x-6)(x-9)(x-11), \\
l_{3,1}(x) &= \frac{(x-5)(x-9)(x-11)}{(6-5)(6-9)(6-11)} = \frac{1}{15}(x-5)(x-9)(x-11), \\
l_{3,2}(x) &= \frac{(x-5)(x-6)(x-11)}{(9-5)(9-6)(9-11)} = -\frac{1}{24}(x-5)(x-6)(x-11), \\
l_{3,3}(x) &= \frac{(x-5)(x-6)(x-9)}{(11-5)(11-6)(11-9)} = \frac{1}{60}(x-5)(x-6)(x-9).
\end{aligned}$$

A celkovo pre Lagrangeov interpolačný polynóm platí

$$\begin{aligned}
L_3(x) &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_{3,i}(x) \\
&= 12\cdot\left(-\frac{1}{24}(x-6)(x-9)(x-11)\right) + 13\cdot\frac{1}{15}(x-5)(x-9)(x-11) \\
&\quad +14\cdot\left(-\frac{1}{24}(x-5)(x-6)(x-11)\right) + 16\cdot\frac{1}{60}(x-5)(x-6)(x-9) \\
&= \frac{1}{20}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{557}{60}x - \frac{23}{2}.
\end{aligned}$$

Príklad 8 *Pre tie isté hodnoty nájdime Newtonov interpolačný polynóm:*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	5	6	9	11
$f(x_i):$	12	13	14	16

Pre výpočet budeme potrebovať príslušné pomerné diferencie až do tretieho rádu, ktoré si zapíšeme do tabuľky

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$\underbrace{f[x_{i+1}, x_i]}_{\text{pomerná diferencia 1. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]}_{\text{pomerná dif. 2. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+3}x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]}_{\text{pomerná dif. 3. rádu}}$
0	5	$\boxed{12}$	$\frac{13-12}{6-5} = \boxed{1}$	$\frac{\frac{1}{3}-1}{9-5} = \boxed{-\frac{1}{6}}$	$\frac{\frac{2}{15}-\left(-\frac{1}{6}\right)}{11-5} = \boxed{\frac{1}{20}}$
1	6	13	$\frac{14-13}{9-6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1-\frac{1}{3}}{11-6} = \frac{2}{15}$	
2	9	14	$\frac{16-14}{11-9} = 1$		
3	11	16			

A na základe nájdených prvých pomerných diferencií príslušných rádov určíme Newtonov interpolačný polynóm nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 12 + 1\cdot(x-5) + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(x-5)(x-6) + \frac{1}{20}\cdot(x-5)(x-6)(x-9) \\ &= \frac{1}{20}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{557}{60}x - \frac{23}{2} = 0.05x^3 - 1.166\,7x^2 + 9.283\,3x - 11.5. \end{aligned}$$

Príklad 9 *Metódou najmenších štvorcov aproximujme logaritmickou funkciou hodnoty v tabuľke*

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	0.005
1	3	1.203
2	6	1.912
3	7	2.222

Logaritmická funkcia, určená vzťahom

$$y = a + b\ln x,$$

kde neznáme parametre a, b určíme metódou najmenších štvorcov, ktorá vedie na riešenie sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorej riešenie použitím Cramerovho pravidla je

$$\begin{aligned} b &= \frac{(n+1)\cdot\sum\limits_{i+0}^{n}(y_i\ln x_i) - \sum\limits_{i+0}^{n} y_i\cdot\sum\limits_{i+0}^{n}\ln x_i}{(n+1)\cdot\sum\limits_{i+0}^{n}(\ln x_i)^2 - \left(\sum\limits_{i+0}^{n}\ln x_i\right)^2} \\ &= \frac{4\cdot 9.07 - 5.34\cdot 4.84}{4\cdot 8.20 - (4.84)^2} \doteq 1.11, \\ a &= \frac{\sum\limits_{i+0}^{n} y_i - b\cdot\sum\limits_{i+0}^{n}\ln x_i}{(n+1)} = \frac{5.34 - 1.11\cdot 4.84}{4} \doteq -0.01, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} y_i &\doteq 5.34,\\ \sum_{i=0}^{n} \ln x_i &\doteq 4.84,\\ \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 &\doteq 8.20,\\ \sum_{i=0}^{n} (y_i \ln x_i) &\doteq 9.07.\end{aligned}$$

A hľadaná logaritmická funkcia má teda tvar

$$y = a + b \cdot \ln x = -0.01 + 1.11 \cdot \ln x.$$

Príklad 10 *Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu zadanú v tabuľke:*

i :	0	1	2	3	4
x_i :	4	6	10	-2	1
$y_i = f(x_i)$:	13	5	8	3	-7

Lagrangeov interpolačný polynóm zostrojíme ako lineárnu kombináciu

$$L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i) \cdot l_{4,i}(x)$$

funkčných hodnôt a ***elementárnych Lagrangeových interpolačný polynómov***

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}.$$

Takže v našom prípade tieto elementárne Lagrangeove polynómy budú mať tvar

$$\begin{aligned}l_{4,0}(x) &= \frac{(x-6)(x-10)(x-(-2))(x-1)}{(4-6)(4-10)(4-(-2))(4-1)}\\ &= \frac{1}{216}(x-1)(x+2)(x-6)(x-10),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_{4,1}(x) &= \frac{(x-4)(x-10)(x-(-2))(x-1)}{(6-4)(6-10)(6-(-2))(6-1)}\\ &= -\frac{1}{320}(x-1)(x+2)(x-4)(x-10),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_{4,2}(x) &= \frac{(x-4)(x-6)(x-(-2))(x-1)}{(10-4)(10-6)(10-(-2))(10-1)}\\ &= \frac{1}{2592}(x-1)(x+2)(x-4)(x-6),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_{4,3}(x) &= \frac{(x-4)(x-6)(x-10)(x-1)}{(-2-4)(-2-6)(-2-10)(-2-1)} \\
&= \frac{1}{1728}(x-1)(x-4)(x-6)(x-10),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{4,4}(x) &= \frac{(x-4)(x-6)(x-10)(x-(-2))}{(1-4)(1-6)(1-10)(1-(-2))} \\
&= -\frac{1}{405}(x+2)(x-4)(x-6)(x-10).
\end{aligned}
$$

Na základe toho bude Lagrangeov interpolačný polynóm

$$
\begin{aligned}
L_4(x) &= \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\cdot l_{4,i}(x) \\
&= 13\cdot\frac{1}{216}(x-1)(x+2)(x-6)(x-10) \\
&\quad +5\cdot\left(-\frac{1}{320}(x-1)(x+2)(x-4)(x-10)\right) \\
&\quad +8\cdot\frac{1}{2592}(x-1)(x+2)(x-4)(x-6) \\
&\quad +3\cdot\frac{1}{1728}(x-1)(x-4)(x-6)(x-10) \\
&\quad +(-7)\cdot\left(-\frac{1}{405}(x+2)(x-4)(x-6)(x-10)\right) \\
&= \frac{1}{15}x^4-\frac{43}{40}x^3+\frac{467}{120}x^2+\frac{247}{60}x-14 \\
&= 6.6667\times10^{-2}x^4-1.075x^3+3.8917x^2+4.1167x-14.0.
\end{aligned}
$$

Príklad 11 *Pre tie isté hodnoty nájdime Newtonov interpolačný polynóm*

$i:$	0	1	2	3	4
$x_i:$	4	6	10	-2	1
$y_i=f(x_i):$	13	5	8	3	-7

Pre určenie Newtonovho interpolačného polynómu budeme potrebovať pomerná jednotlivé diferencie až do rádu štvrtého, ktoré si zapíšeme do tabuľky.

i	x_i	$y_i=f(x_i)$	$\underbrace{f[x_{i+1},x_i]}_{pom.\ dif.\ 1.\ rádu}$	$\underbrace{f[x_{i+2},x_{i+1},x_i]}_{pomerná\ dif.\ 2.\ r.}$	$\underbrace{f[x_{i+3},\ldots,x_i]}_{pomerná\ dif.\ 3.\ r.}$	$\underbrace{f[x_{i+3},\ldots,x_i]}_{pomerná\ dif.\ 4.\ r.}$
0	4	$\boxed{13}$	$\frac{5-13}{6-4}=\boxed{-4}$	$\frac{\frac{3}{4}-(-4)}{10-4}=\boxed{\frac{19}{24}}$	$\frac{\frac{1}{24}-\frac{19}{24}}{-2-4}=\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{-\frac{3}{40}-\frac{1}{8}}{1-4}=\boxed{\frac{1}{15}}$
1	6	5	$\frac{8-5}{10-6}=\frac{3}{4}$	$\frac{\frac{5}{12}-\frac{3}{4}}{-2-6}=\frac{1}{24}$	$\frac{\frac{5}{12}-\frac{1}{24}}{1-6}=-\frac{3}{40}$	
2	10	8	$\frac{3-8}{-2-10}=\frac{5}{12}$	$\frac{-\frac{10}{3}-\frac{5}{12}}{1-10}=\frac{5}{12}$		
3	-2	3	$\frac{-7-3}{1-(-2)}=-\frac{10}{3}$			
4	1	-7				

A teda

$$\begin{aligned}
N_4(x) &= 13 + (-4)\cdot(x-4) + \frac{19}{24}\cdot(x-4)(x-6) \\
&\quad + \frac{1}{8}\cdot(x-4)(x-6)(x-10) \\
&\quad + \frac{1}{15}\cdot(x-4)(x-6)(x-10)(x-(-2)) \\
&= \frac{1}{15}x^4 - \frac{43}{40}x^3 + \frac{467}{120}x^2 + \frac{247}{60}x - 14 \\
&= 6.6667\times 10^{-2}x^4 - 1.075x^3 + 3.8917x^2 + 4.1167x - 14.0.
\end{aligned}$$

Príklad 12 *Metódou najmenších štvorcov aproximujme kvadratickým polynómom funkciu zadanú bodmi v tabuľke:*

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	4.651
1	3	48.698
2	6	300.741
3	7	400.222
4	8	635.984
5	10	1200.984

Hľadáme polynóm tvaru

$$y = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2.$$

Budeme potrebovať sumy hodnôt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{5} x_i &= 35, \\
\sum_{i=0}^{5} y_i &\doteq 2591.28, \\
\sum_{i=0}^{5} x_i^2 &= 259, \\
\sum_{i=0}^{5} x_i^3 &= 2099, \\
\sum_{i=0}^{5} x_i^4 &= 17875, \\
\sum_{i=0}^{5} x_i y_i &\doteq 21854.46, \\
\sum_{i=0}^{5} x_i y_i^2 &\doteq 191681.86.
\end{aligned}$$

A riešime sústavu

$$\begin{aligned} a_0(n+1)+a_1\sum_{i=0}^{5}x_i+a_2\sum_{i=0}^{5}x_i^2 &= \sum_{i=0}^{5}y_i, \\ a_0\sum_{i=0}^{5}x_i+a_1\sum_{i=0}^{5}x_i^2+a_2\sum_{i=0}^{5}x_i^3 &= \sum_{i=0}^{5}x_iy_i, \\ a_0\sum_{i=0}^{5}x_i^2+a_1\sum_{i=0}^{5}x_i^3+a_2\sum_{i=0}^{5}x_i^4 &= \sum_{i=0}^{5}x_iy_i^2 \end{aligned}$$

kde po dosadení dostávame sústavu

$$\begin{aligned} a_0\cdot 6+a_1\cdot 35+a_2\cdot 259 &= 2591.28, \\ a_0\cdot 35+a_1\cdot 259+a_2\cdot 2099 &= 21854.46, \\ a_0\cdot 259+a_1\cdot 2099+a_2\cdot 17875 &= 191681.86. \end{aligned}$$

Ktorej riešenie je

$$\begin{aligned} a_0 &\doteq 94.29, \\ a_1 &\doteq -86.78, \\ a_2 &\doteq 19.55. \end{aligned}$$

A hľadaná funkcia má tvar

$$\begin{aligned} y &= a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2 \\ &= 94.29-86.78x+19.55x^2. \end{aligned}$$

Príklad 13 *Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre funkciu zadanú v tabuľke:*

$i:$	0	1	2	3
$x_i:$	-1	2	5	0
$y_i=f(x_i):$	2	5	9	-2

Lagrangeov interpolačný polynóm zostrojíme ako lineárnu kombináciu

$$L_4(x)=\sum_{i=0}^{3}f(x_i)\cdot l_{3,i}(x)$$

*funkčných hodnôt a **elementárnych Lagrangeových interpolačný polynómov***

$$l_{n,i}(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}.$$

V našom prípade, pre body zadané v tabuľke, budú jednotlivé elementárne Lagrangeove polynómy mať tvar

$$\begin{aligned}
l_{3,0}(x) &= \frac{(x-2)(x-5)(x-0)}{(-1-2)(-1-5)(-1-0)} = -\frac{1}{18}x(x-2)(x-5),\\
l_{3,1}(x) &= \frac{(x-(-1))(x-5)(x-0)}{(2-(-1))(2-5)(2-0)} = -\frac{1}{18}x(x+1)(x-5),\\
l_{3,2}(x) &= \frac{(x-(-1))(x-2)(x-0)}{(5-(-1))(5-2)(5-0)} = \frac{1}{90}x(x+1)(x-2),\\
l_{3,3}(x) &= \frac{(x-(-1))(x-2)(x-5)}{(0-(-1))(0-2)(0-5)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)(x-5).
\end{aligned}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm má tvar

$$\begin{aligned}
L_4(x) &= \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_{3,i}(x)\\
&= 2\cdot\left(-\frac{1}{18}x(x-2)(x-5)\right)+5\cdot\left(-\frac{1}{18}x(x+1)(x-5)\right)\\
&\quad +9\cdot\frac{1}{90}x(x+1)(x-2)+(-2)\cdot\frac{1}{10}(x+1)(x-2)(x-5)\\
&= -\frac{22}{45}x^3+\frac{269}{90}x^2-\frac{47}{90}x-2\\
&= -0.488\,89x^3+2.988\,9x^2-0.522\,22x-2.0.
\end{aligned}$$

Príklad 14 *Pre tie isté hodnoty nájdime Newtonov interpolačný polynóm*

i :	0	1	2	3
x_i :	-1	2	5	0
$y_i = f(x_i)$:	2	5	9	-2

Budeme potrebovať jednotlivé pomerné diferencie až po rád tretí, ktoré zapíšeme do tabuľky

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$\underbrace{f[x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná dif. 1. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+2},x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná dif. 2. rádu}}$	$\underbrace{f[x_{i+3}x_{i+2},x_{i+1},x_i]}_{\text{pomerná dif. 3. rádu}}$
0	-1	$\boxed{2}$	$\frac{5-2}{2-(-1)}=\boxed{1}$	$\frac{\frac{4}{3}-1}{5-(-1)}=\boxed{\frac{1}{18}}$	$\frac{-\frac{13}{30}-\frac{1}{18}}{0-(-1)}=\boxed{-\frac{22}{45}}$
1	2	5	$\frac{9-5}{5-2}=\frac{4}{3}$	$\frac{\frac{11}{5}-\frac{4}{3}}{0-2}=-\frac{13}{30}$	
2	5	9	$\frac{-2-9}{0-5}=\frac{11}{5}$		
3	0	-2			

Newtonov interpolačný polynóm konštruujeme pomocou prvých pomerných difer-

encií jednotlivých rádov

$$\begin{aligned} N_3(x) &= 2 + 1 \cdot (x - (-1)) + \frac{1}{18} \cdot (x - (-1))(x - 2) \\ &\quad + \left(-\frac{22}{45}\right) \cdot (x - (-1))(x - 2)(x - 5) \\ &= -\frac{22}{45}x^3 + \frac{269}{90}x^2 - \frac{47}{90}x - 2. \end{aligned}$$

Príklad 15 *Metódou najmeších štvorcov aproximujme logaritmickú funkciu zadanú tabuľkou*

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	1	3.3
1	3	5.5
2	6	6.3
3	7	7.2
4	8	7.2
5	10	7.6

Logaritmickú funkciu

$$y = a + b \cdot \ln x,$$

aproximujeme metódou najmeších štvorcov, čo vedie na riešenie sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorej riešenie by pre neznáme paramatre a, b bolo

$$\begin{aligned} b &= \frac{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} (y_i \ln x_i) - \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \sum_{i=0}^{n} \ln x_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right)^2} = \frac{6 \cdot 63.8 - 37.1 \cdot 9.2}{6 \cdot 17.8 - (9.2)^2} \doteq 1.9, \\ a &= \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i - b \cdot \sum_{i=0}^{n} \ln x_i}{(n+1)} = \frac{37.1 - 1.9 \cdot 9.2}{6} \doteq 3.3, \end{aligned}$$

kde súčty sú

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \ln x_i &\doteq 9.2, \\ \sum_{i=0}^{n} y_i &\doteq 37.1, \\ \sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 &\doteq 17.8, \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i \ln x_i) &\doteq 63.8. \end{aligned}$$

A teda hľadaná funkcia je

$$y = a + b \cdot \ln x = 3.3 + 1.9 \cdot \ln x.$$