Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Singulárny rozklad matice

Pavol ORŠANSKÝ

15. novembra 2023

Singulárny rozklad matice

Veta (Singulárny rozklad matice)

Každá **regulárna matica** A **typu** (m, n) **je rozložiteľná na súčin** *troch matíc*

$$A_{m,n} = U_{m,m} \cdot S_{m,n} \cdot V_{n,n}^T,$$

kde matica $U_{m,m}$ je ortonormálna matica ($U^T \cdot U = I$), ktorej stĺpce sú vlastné vektory prislúchajúce k vlastným číslam matice $A \cdot A^T$ v zostupnom poradí, matica $V_{n,n}$ je ortonormálna matica ($V^T \cdot V = I$), ktorej stĺpce sú vlastné vektory prislúchajúce k vlastným číslam matice $A^T \cdot A$ v zostupnom poradí a matica S je diagonálna matica obsahujúca druhé odmocniny vlastných čísel matice U, resp. V, v zostupnom poradí.

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Príklad (1.)

Nájdite singulárny rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Nájdeme maticu U, ktorá bude tvorená vlastnými vektormi matice $A \cdot A^T$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Hľadané vlastné vektory sú teda riešenia homogénnej lineárnej sústavy rovníc

$$\left(\left(A \cdot A^T\right) - \lambda \cdot I\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

Táto sústava má netriviálne (nenulové) riešenie práve vtedy, ak platí

$$\det\left(\left(A \cdot A^T\right) - \lambda \cdot I\right) = 0,$$

čo je charakteristická rovnica matice $A \cdot A^T$, a teda

$$\begin{vmatrix} (11-\lambda) & 1 \\ 1 & (11-\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

odkiaľ po úprave dostávame vlastné čísla matice $A \cdot A^T$

$$\begin{aligned} (11-\lambda)(11-\lambda) - 1 &= 0, \\ \lambda^2 - 22\lambda + 120 &= 0 \\ (\lambda - 10)(\lambda - 12) &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 12, \qquad \lambda_2 = 10.$$

Zdôraznime jednoznačnosť poradia vlastných čísel, t.j. **zostupné poradie**.

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Pre prvé vlastné číslo $\lambda_1 = 12$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (11-12) & 1 \\ 1 & (11-12) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

alebo v inom zápise sústavy rovníc

$$\begin{aligned} -u_{1_1} + u_{1_2} &= 0, \\ u_{1_1} - u_{1_2} &= 0, \end{aligned}$$

ktorej riešením je vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť napríklad za riešenie vektor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ktorý normalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{\mathbf{u}_1^T}{\left|\mathbf{u}_1^T\right|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

čiže prvý hľadaný vektor $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ má tvar

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Pre vlastné číslo $\lambda_2 = 10$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} (11-10) & 1 \\ 1 & (11-10) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} u_{2_1} + u_{2_2} &= 0, \\ u_{2_1} + u_{2_2} &= 0, \end{aligned}$$

ktorej riešením je vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{2_1} \\ u_{2_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Opäť bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť napríklad $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, čo po normalizácii bude

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2^T = \frac{\mathbf{u}_2^T}{\left|\mathbf{u}_2^T\right|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right),$$

odkiaľ

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hľadaná matica U preto je

$$U = (\widetilde{\mathbf{u}}_1, \widetilde{\mathbf{u}}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Výpočet matice V je obdobný, je tvorená vlastnými vektormi matice $A^T \cdot A$, čiže

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastné vektory sú netriviálne riešenia sústavy

$$\left(\left(A^T \cdot A\right) - \lambda \cdot I\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

čo platí iba vtedy, ak

$$\det\left(\left(A \cdot A^T\right) - \lambda \cdot I\right) = 0,$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

odkiaľ dosadením a úpravou dostávame

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (10-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (10-\lambda) & 4 \\ 2 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} &= 0, \\ -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 120\lambda &= 0, \\ \lambda\,(\lambda-10)\,(\lambda-12) &= 0, \end{aligned}$$

čiže tri hľadané vlastné čísla sú

$$\lambda_1 = 12, \qquad \lambda_2 = 10, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Všimnime si zhodu prvých dvoch vlastných čísel s predošlými ako aj fakt, že tretie je nulové!

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 12$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} (10-12) & 0 & 2 \\ 0 & (10-12) & 4 \\ 2 & 4 & (2-12) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom napríklad podľa druhého riadku

$$v_{1_1} = k \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 8k,$$

$$v_{1_2} = k \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 16k,$$

$$v_{1_3} = k \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8k.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Riešením je vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1_1} \\ v_{1_2} \\ v_{1_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ 16k \\ 8k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť za riešenie aj vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ktorý

normalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{\mathbf{v}_1^T}{\left|\mathbf{v}_1^T\right|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right),$$

čiže

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Vlastnému číslu $\lambda_2 = 10$ prislúcha homogénna sústava lineárnych rovníc

$$\begin{pmatrix} (10-10) & 0 & 2 \\ 0 & (10-10) & 4 \\ 2 & 4 & (2-10) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{4} \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom napríklad opäť podľa druhého riadku

$$\begin{aligned} v_{2_1} &= k \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 8k, \\ v_{2_2} &= k \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -4k, \\ v_{2_3} &= k \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Dostávame príslušný vlastný vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2_1} \\ v_{2_2} \\ v_{2_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ -4k \\ 0k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Opäť môžeme zvoliť za riešenie napríklad vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorý normalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2^T = \frac{\mathbf{v}_2^T}{|\mathbf{v}_2^T|} = \frac{(2,-1,0)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, 0\right),$$

teda

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Vlastný vektor $\mathbf{v}_3$ prislúcha vlastnému číslu $\lambda_3 = 0$, pre ktorú dostávame sústavu

$$\begin{pmatrix} (10-0) & 0 & 2 \\ 0 & (10-0) & 4 \\ 2 & 4 & (2-0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime napríklad opäť podľa rozvoja druhého riadku.

$$\begin{aligned} v_{3_1} &= k \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8k, \\ v_{3_2} &= k \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 16k, \\ v_{3_3} &= k \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -40k. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Posledný vlastný vektor je zrejme $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{3_1} \\ v_{3_2} \\ v_{3_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ 16k \\ -40k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Zvolíme napríklad vektor $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, ktorý po normalizácii bude

$$\widetilde{\mathbf{v}}_3^T = \frac{\mathbf{v}_3^T}{\left|\mathbf{v}_3^T\right|} = \frac{(1, 2, -5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right) = \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{-\sqrt{30}}{6}\right),$$

a preto

$$\widetilde{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 1.

Matica V má teda tvar

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{pmatrix}.$$

V rozklade však vystupuje transponovaný tvar tejto matice, ktorý sme trochu upravili

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{pmatrix}.$$

Matica S typu $(2,3)$ je diagonálna matica obsahujúca druhé odmovniny vlastných čísel matíc U a V

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice A je teda

$$\begin{aligned}
A_{m,n} &= U_{m,m} \cdot S_{m,n} \cdot V_{n,n}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{30}}{6} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Príklad (2.)

Nájdime singulárny rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Hľadáme maticu U, tvorenú vlastnými vektormi matice

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \det\left(A \cdot A^T - \lambda \cdot I\right) &= 0, \\ \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda\left(\lambda - 6\right)\left(\lambda - 1\right) = 0$$

preto vlastné čísla tejto matice sú

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Pre $\lambda_1 = 6$ bude prislúchať vlastný vektor vyhovujúci homogénnemu systému

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom napr. 1. riadka a dostávame

$$\begin{aligned}
u_{1_1} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 25k, \\
u_{1_2} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 5k, \\
u_{1_3} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 10k, k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

A teda jedným z riešení je napríklad vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ktorý normalizujeme

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}}_1^T &= \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{(5,1,2)^T}{\sqrt{5^2+1^2+2^2}} = \frac{(5,1,2)^T}{\sqrt{30}} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)^T \\ &= \left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)^T. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Pre vlastné č. $\lambda_2 = 1$ riešime sústavu

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 \quad = \quad \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 \quad = \quad \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom podľa druhého riadku

$$\begin{aligned} u_{2_1} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 0, \\ u_{2_2} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -4k, \\ u_{2_3} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 2k, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Teda bez ujmy na všeobecnosti $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ktorý tiež normujeme

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}}_2^T &= \frac{\mathbf{u}_2^T}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{(0, 2, -1)}{\sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^T \\ &= \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)^T . \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

A pre vlastné číslo $\lambda_3 = 0$ riešime homogénnu sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5-\lambda_3 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_3 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u_3} &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u_3} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

riešime rozvojom prvého riadka

$$\begin{aligned} u_{3_1} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot k = k, \\ u_{3_2} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot k = -k, \\ u_{3_3} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -2k, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Opäť bez ujmy na všeobecnosti, nech je $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ktorý takisto znormujeme

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{u}}_3^T &= \frac{\mathbf{u}_3^T}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{(1,-1,-2)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^T \\
&= \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)^T.
\end{aligned}
$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Ďaľšia matica V bude tvorená vlastnými vektormi matice

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

ktorá bude mať tie isté vlatsné čísla (okrem nulového) ako matica $A \cdot A^T$, keďže jej charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Pre $\lambda_1 = 6$ riešime

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2-6 & 2 \\ 2 & 5-6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{4} & \mathbf{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

rozvojom prvého riadku by sme dostali napríklad jedno z riešení $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ktorý má normalizovaný tvar $\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

A podobne pre $\lambda_2 = 1$ riešime sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorá má napríklad riešenie $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a to má po normalizovaní tvar

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Čiže matica U má stĺpce tvorené vlastnými vektormi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, teda

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

a podobne matica

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

avšak do redekompozície dosádzame jej transponovaný tvar (v tomto prípade totožný)

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice - Príklad 2.

Zrejme platí

$$\begin{aligned}
U\cdot S\cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{30}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} & \frac{1}{15}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} \\ \frac{1}{150}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30}+\frac{4}{5} & \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30}-\frac{2}{5} \\ \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30}-\frac{2}{5} & \frac{2}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30}+\frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & -1.262\,2\times 10^{-29} \\ -1.262\,2\times 10^{-29} & 1.0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Singulárny rozklad matice

Singulárny rozklad matíc nachádza bohaté uplatnenie v teórii matíc a algebry (výpočet pseudoinverzných matíc, riešenie sústav homogénnych lineárnych rovníc, podobné matice, atď.).

V minulosti sa tento rozklad používal i na riešenie nehomogénnych sústav lineárnych rovníc.

Uveďme si tento postup, ktorý je veľmi podobný využitiu LU rozkladu na riešenie týchto sústav.

Singulárny rozklad matice

Pôvodnú maticu sústavy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

nahrádzame singulárnym rozkladom

$$U \cdot S \cdot V^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

túto maticovú rovnicu prenásobíme zľava inverznou maticou U^{-1} (matica U je ortonormálna, a teda platí $U^{-1} = U^T$)

$$S \cdot V^T \cdot \mathbf{x} = U^T \cdot \mathbf{b}.$$

Položíme $V^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = V \cdot \mathbf{y}$ a $U^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d}$. Po vyriešešení (vynásobení) $\mathbf{d} = U^T \cdot \mathbf{b}$ ako aj $\mathbf{y} = V^T \cdot \mathbf{x}$ následne vyriešime sústavu $S \cdot \mathbf{y} = \mathbf{d}.$
V prostredí MatLab by pre danú maticu sústav A a stĺpcový vektor pravých strán **b** postup vyzeral nasledujúcim spôsobom

```
[U,S,V]=svd(A);
x=V*((U'*b)./diag(S)
```