Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc

Pavol ORŠANSKÝ

15. novembra 2023

Systém lineárnych systémov

Sústava n **lineárnych rovníc o** n **neznámych** (a tými sa budeme výhradne zaoberať) rozumieme systém lineárnych rovníc tvaru

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Systém môžeme reprezentovať maticovou rovnicou

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

kde $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ je **matica sústavy**, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ je stĺpcový **vektor neznámych** a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ je stĺpcový **vektor pravých strán**.

Riešiteľnosť lineárnych systémov

Definícia (Riešenie lineárneho systému)

Vektor $\mathbf{x}$ *sa nazýva riešenie systému (1), práve vtedy, ak vyhovuje maticovej rovnici (2), t. j. platí*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Poznámka (Existencia jednoznačného riešenia lineárnej sústavy)

Z predošlých kurzov lineárnej algebry je nám známe, že existuje práve jedno riešenie $\mathbf{x}_0$ *systému (1), a to iba v prípade že, existuje inverzná matica* A^{-1} *ku štvorcovej matici systému* A*, a tá existuje iba vtedy, ak je matica* A *regulárna*[1]*, t. j.* $\det A \neq 0$*, resp. hodnosť matice* A *je rovná jej stupňu* n*,* $h(A) = n$*.*

[1] V ďalšom budeme vždy predpokladať regulárnosť matice sústavy.

Priame a nepriame metódy riešenia lineárnych systémov

V zásade rozlišujem dva typy metód riešenia sústav lineárnych rovníc

1.) Priame metódy riešenia

Výpočet riešenia pomocou priamej metódy nie je zaťažený nijakými systémovými chybami metódy (nehľadáme približné riešenie). Výsledok je ovplyvnený iba chybami zaoukrúhľovania.

2.) Nepriame (iteračné) metódy riešenia

Výsledkom je približné riešenie zaťažené nielen zaokrúhľovacími chybami, ale aj systémovými chybami metódy.

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je známa metóda riešenia sústav lineárnych rovníc. Spočíva v priradení jednotlivým zložkám riešenia x_i príslušné podiely determinantu matice vzniklej nahradením príslušného i-tého stĺpca matice sústavy stĺpcom pravých strán $\mathbf{b}$ a determinantu matice sústavy A.

Veta (Cramerovo pravidlo)

Nech D je deteminant matice sústavy. Nech D_i je deteminant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením i-tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (2) je vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, kde

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

text kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Gaussova eliminačná metóda - GEM

Gaussova eliminačná metóda riešenia sústavy je založená na tom, že sústavu lineárnych rovníc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ prevedieme (pomocou troch ekvivalentných riadkových maticových operácii) na ekvivalentnú sústavu rovníc $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde matica C je horná trojuholníková matica. Z tohto tvaru vieme spätnou transformáciou nájsť presné riešenie sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Použijúc algoritmus

$$
\begin{aligned}
\text{for } j &= 2:n \\
\text{for } i &= j:n \\
m &= (a_{i,j-1})\,/\,(a_{j-1,j-1})\,; \\
a_{i,j} &= a_{i,j} - a_{j-1,j} \cdot m; \\
b_{i,j} &= b_i - b_{j-1} \cdot m; \\
&\text{end} \\
&\text{end}
\end{aligned}
$$

Gaussova eliminačná metóda - GEM

Dostávame z pôvodnej sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (1) sústavu v tvare $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde matica $C = \left\{ a_{ij}^{(k)} \right\}_{i=j}^{n}$ je **horná trojuholníková matica** ($a_{ij}^{(k)} = 0$, pre $i > j$) vzniknutá konečným počtom elementárnych riadkových operácii algoritmu aplikovaných na pôvodnú maticu A

$$
\begin{array}{rcl}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\
a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2,n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)}, \\
a_{3,3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{3,n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n & = & b_{n-1}^{(n-2)} \\
a_{n,n}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}.
\end{array}
$$

Gaussova eliminačná metóda - GEM

Z tohto horného trojuholníkového tvaru $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ **spätnou transformáciou** dostaneme (aspoň teoreticky) presné riešenie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

$$
\begin{aligned}
x_n &= (b_n) \,/\, \left(a_{n,n}^{(n-1)}\right); \\
\text{for } j &= n-1 : -1 : 1 \\
x_j &= \left(b_j - \sum_{i=j+1}^{n} a_{j,i}^{(n-j)} \cdot x_j\right) \Bigg/ \, a_{j,j}^{(n-j)}; \\
&\quad \text{end}
\end{aligned}
$$

Poznámka (Čiastočný resp. úplný výber hlavného prvku)

Všimnime si, že v predošlom algoritme sa vyskytuje viac krát delenie diagonálnym prvkom matice $a_{j,j}^{(k)}$*. Je samozrejmé, že v prípade prvkov hlavnej diagonály blízkych k číslu nula, je daný algoritmus silne citlivý na šírenie zaokrúhľovacej chyby. Preto je vhodné dbať na to, aby sme výskytu takýchto hodnôt počas výpočtu zamedzili.*

Aby sme teda minimalizovali zaokrúhľovacie chyby, **je vhodné vyberať za hlavné prvky (pivoty)** $a_{j,j}^{(k)}$**, také prvky upravenej matice sústavy, ktoré majú čo najväčšiu absolútnu hodnotu**. *Chyba sa v takomto prípade pri ďalších násobeniach ďalej nezväčšuje. Ak vyberáme v danej fáze hlavný prvok zo všetkých prvkov, ktoré prichádzajú do úvahy, hovoríme o algoritme s úplným výberom hlavného prvku. Ak vyberáme hlavný prvok len z niektorých prvkov (napr. len z jedného riadku alebo stĺpca matice) hovoríme o algoritme s čiastočným výberom hlavného prvku.*

Gaussova eliminačná metóda - GEM

Poznámka (Výpočtová náročnosť GEM)

Pre sústavu n lineárnych rovníc je celkový počet operácii delenia $n(n+1)/2$, počet operácii násobenia pri doprednej eliminácii je $n(n+1)(n-1)/3$, pri spätnej transformácii je počet operácii násobenia $n(n-1)/2$.
Teda celkový počet operácii je potom

$$n(n+1)/2 + n(n+1)(n-1)/3 + n(n-1)/2 = \frac{1}{3}n\left(n^2+3n-1\right).$$

Pre dostatočne veľké n je tento počet operácii približne daný

$$\sum \approx \frac{n^3}{3}.$$

Riešenie lineárnych sústav pomocou inverznej matice

Ďalšia priama metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc je založená na riešení maticovej rovnice, t.j.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \qquad \Big/ A^{-1} \text{ (násobenie sprava)} \\ \mathbf{x} &= A^{-1} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Na prvý pohľad jednoduché riešenie v sebe ukrýva zásadný problém, a to problém hľadania inverznej matice. Z kurzov algebry vieme, že existujú v zásade dva spôsoby hľadania inverznej matice, a to pomocou algebraických doplnkov a úpravou elementárnymi úpravami. Oba spôsoby sú defacto založené na algoritmoch už spomenutých metód Cramerovho pravidla a Gaussovej eliminačnej metódy.
z výpočtovej techniky je známy príkaz z praxe prostredia MatLab $\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$.

LU rozklad - algoritmus

LU rozklad matice A je algoritmus hľadania koeficientov matice L a U je založený na úprave matice sústavy na horný trojuholníkový tvar (matica U, „upper triangular matrix") a súčasná úprava jednotkovej matice I na dolný trojuholníkový tvar (matica L, „lower triangular matrix"), pre ktore plati

$$A = L \cdot U.$$

Vo všeobecnosti je definovaný nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k}, \qquad \text{pre } i = j+1, j+2, \ldots, n, \\ l_{i,j} &= \frac{1}{u_{i,i}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k} \right), \qquad \text{pre } j = i+1, i+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

LU rozklad matice 3x3

V prípade matice 3×3 je tento postup nasledujúci

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix},$$

algoritmus môžeme zapísať nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= 1, & u_{1,1} &= a_{1,1}, \\ l_{2,2} &= 1, & u_{1,2} &= a_{1,2}, \\ l_{3,3} &= 1, & u_{1,3} &= a_{1,3}, \\ l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}}, & u_{2,2} &= a_{2,2} - u_{1,2} \cdot l_{2,1}, \\ l_{3,1} &= \frac{1}{u_{1,1}} \cdot a_{3,1}, & u_{2,3} &= a_{2,3} - u_{1,3} \cdot l_{2,1}, \\ l_{3,2} &= \frac{1}{u_{2,2}} \cdot (a_{3,2} - u_{1,2} \cdot l_{3,1}), & u_{3,3} &= a_{3,3} - (u_{1,3} \cdot l_{3,1} + u_{2,3} \cdot l_{3,1}). \end{aligned}$$

Príklad (1a)

Nájdite LU rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix}.$$

Najskôr si predpripravíme matice L a U v požadovanom tvare

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1b)

Matica U vznikne ekvivalentnými úpravami z matice A, t.j.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\left(\frac{4}{2} = \mathbf{2}\right) \cdot \mathbf{I.} \\ -\left(\frac{6}{2} = \mathbf{3}\right) \cdot \mathbf{I.} \end{matrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{12}} & \mathbf{32} \end{pmatrix} - \left(\frac{12}{3} = \mathbf{4}\right) \cdot \mathbf{II.}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

LU rozklad - riešenie sústavy

Pomocou **LU rozkladu** môžeme **riešiť sústavu lineárnych rovníc** nasledovným spôsobom. Pôvodný systém

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

prepíšeme pomocou rozkladu ako

$$L\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

označíme

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

ktorú spätnou transformáciou ľahko vyriešime, keďže matica U je horná trojuholníková matica. Riešenie $\mathbf{y}$ získame riešním sústavy

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b},$$

ktorú riešime doprednou transformáciou, keďže matica L je dolná trojuholníková matica.

Veta (Choleskyho rozklad)

Ak A je **symetrická, pozitívne definitná matica**, *potom existuje dolná trojuholníková matica L s kladnými diagonálnymi prvkami taká, že platí*

$$A = L \cdot L^T.$$

Tento rozklad sa nazýva **Choleskyho rozklad**[2] *a platí*

$$\begin{aligned} l_{j,j} &= \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}, && \textit{pre } j = 1, 2, \dots, n, \\ l_{i,j} &= \frac{1}{l_{j,j}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right), && \textit{pre } i = j+1, j+2, \dots, n. \end{aligned}$$

[2] Objavil André-Louisom Choleskym pre reálne matice a posmrtne bol publikovaný v roku 1924.

Definícia (Pozitívne definítna matica)

Matica A sa nazýva pozitívne definitná práve vtedy, ak pre každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0.$$

Poznámka

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

1. *Matica A je pozitívne definitná.*
2. *Všetky vlastné čísla matice A sú kladné.*
3. *Existuje Choleskyho rozklad $A = L \cdot L^T$.*

Choleskyho rozklad

Príklad (2a)

Nájdite Choleskyho rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5,$$

Choleskyho rozklad

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$
\begin{aligned}
l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5, \\
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3,
\end{aligned}
$$

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5, \\ l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3, \\ l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3, \end{aligned}$$

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$
\begin{aligned}
l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5, \\
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3, \\
l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3, \\
l_{3,1} &= \frac{a_{3,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{-5}{5} = -1,
\end{aligned}
$$

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$\begin{aligned}
l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5,\\
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3,\\
l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3,\\
l_{3,1} &= \frac{a_{3,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{-5}{5} = -1,\\
l_{3,2} &= \frac{a_{3,2} - l_{2,1} \cdot l_{3,1}}{l_{2,2}} = \frac{0 - 3 \cdot (-1)}{3} = 1,
\end{aligned}$$

Príklad (2b)

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$
\begin{aligned}
l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5,\\
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3,\\
l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3,\\
l_{3,1} &= \frac{a_{3,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{-5}{5} = -1,\\
l_{3,2} &= \frac{a_{3,2} - l_{2,1} \cdot l_{3,1}}{l_{2,2}} = \frac{0 - 3 \cdot (-1)}{3} = 1,\\
l_{3,3} &= \sqrt{a_{3,3} - l_{3,1}^2 - l_{3,2}^2} = \sqrt{11 - (-1)^2 - 1^2} = \sqrt{9} = 3.
\end{aligned}
$$

Príklad (2c)

Choleskyho rozklad matice A je

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{L^T}.$$

Jacobiho metóda - iteračná (nepriama) metóda

Princíp **Jacobiho metódy** si ukážeme na systéme 3×3, t.j. sústave troch rovníc o troch neznámych

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2, \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_2, \end{aligned}$$

ak si vyjadríme jednotlivé premenné postupne z každej rovnice, tak získavame iteračnú postupnosť pre hľadaný vektor neznámych

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}\right)/a_{1,1}, \\ x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}\right)/a_{2,2}, \\ x_3^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}\right)/a_{3,3}. \end{aligned}$$

Jacobiho metóda - iteračná (nepriama) metóda

Definícia (Diagonálna dominancia matice)

Matica a sa nazýva riadkovo [resp. stĺpcovo] diagonálne dominantná práve vtedy, ak platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\left[\textit{resp.} \quad |a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{i,j}|, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \right].$$

Veta (Postačujúca podmienka konvergencie Jacobiho iteračnej metódy)

Ak je matica diagonálne dominantná potom Jacobiho metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0$.

Iteráciu ukončíme, ak $\max \left| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right| < \varepsilon$, kde ε je požadovaná presnosť.

Jacobiho metóda - iteračná (nepriama) metóda

Príklad (3a)

Jacobiho metódou riešte sústavu s presnosťou $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 3, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 9, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= -6. \end{aligned}$$

Overíme, či je matica sústavy diagonálne dominantná

$$\begin{aligned} |4| &> |-1| + |-1| = 2, \\ |6| &> |-2| + |1| = 3, \\ |7| &> |-1| + |1| = 2. \end{aligned}$$

Príklad (3b)

Matica sústavy je teda diagonálne dominantná a iteračný vzťah má tvar

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \left(3 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/4, \\ x_2^{(k+1)} &= \left(9 + 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)/6, \\ x_3^{(k+1)} &= \left(-6 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)/7. \end{aligned}$$

Ten bude konvergovať pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu i pre $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$

Príklad (3c)

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7500	1.5000	-0.8571
2	0.9107	1.8929	-0.9643
3	0.9821	1.9643	-0.9974
4	0.9917	1.9936	-0.9974
5	0.9990	1.9968	-1.0003

$$\textit{Platí}\ \max\left|\begin{array}{c} 0.9990-0.9917 \\ 1.9968-1.9936 \\ -1.0003+0.9974 \end{array}\right| < 0.01\ \textit{a riešenie je}\ \mathbf{x}^{(5)} \doteq \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \\ -1.00 \end{pmatrix} \pm 0.01.$$

Gaussova-Seidelová metóda - iteračná (nepriama) metóda

Vyjadrenie iteračného vzťahu Jacobiho metódy

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}\right)/a_{1,1},\\
x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}\right)/a_{2,2},\\
x_3^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}\right)/a_{3,3}.
\end{aligned}$$

si upravíme, a to takým spôsobom, že v druhom riadku, kde prvý koeficient $x_1^{(k)}$ nahradíme už vypočítaným koeficientom $x_1^{(k+1)}$, etc. až si vyjadríme iteračné vzťahy za použitia už vypočítaných presnejších hodnôt tzv. **Gaussova-Seidelová metóda**

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}\right)/a_{1,1},\\
x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}\right)/a_{2,2},\\
x_3^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}\right)/a_{3,3}.
\end{aligned}$$

Príklad (4a)

Gaussova-Seidelovou metódou riešte sústavu s presnosťou $\varepsilon = 0.01$*:*

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 3, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 9, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 &= -6. \end{aligned}$$

Matica sústavy je zrejme diagonálne dominantná, a preto vyjadríme iteračný vzťah v tvare

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \left(3 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/4, \\ x_2^{(k+1)} &= \left(9 + 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)/6, \\ x_3^{(k+1)} &= \left(-6 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)/7. \end{aligned}$$

Príklad (4b)

Podobne ako v predchádzajúcom príklade pre $\mathbf{x}_0 = (0.00, 0.00, 0.00)^T$ *dostávame*

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7500	1.7500	-1.0000
2	0.9375	1.9792	-1.0060
3	0.9933	1.9988	-1.0008
4	0.9995	2.0000	-1.0001

Zrejme je $\max \begin{vmatrix} 0.9995 - 0.9933 \\ 2.0000 - 1.9988 \\ -1.0001 + 1.0008 \end{vmatrix} < 0.01$, *a riešením je* $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \\ -1.00 \end{pmatrix} \pm 0.01.$

Zhrnutie - LU rozklad

LU rozklad matice A je algoritmus hľadania koeficientov matice L a U je založený na úprave matice sústavy na horný trojuholníkový tvar (matica U, „upper triangular matrix") a súčasná úprava jednotkovej matice I na dolný trojuholníkový tvar (matica L, „lower triangular matrix"), pre ktore plati

$$A = L \cdot U.$$

Vo všeobecnosti je definovaný nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k}, && \text{pre } i = j+1, j+2, \ldots, n, \\ l_{i,j} &= \frac{1}{u_{i,i}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k} \right), && \text{pre } j = i+1, i+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Zhrnutie - Choleskyho rozklad

Pre **symetrickú, pozitívne definitnú maticu** A existuje dolná trojuholníková matica L s kladnými diagonálnymi prvkami taká, že platí

$$A = L \cdot L^T$$

tento rozklad sa nazýva **Choleskyho rozklad** a platí

$$\begin{aligned} l_{j,j} &= \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}, & \text{pre } j = 1, 2, \ldots, n, \\ l_{i,j} &= \frac{1}{l_{j,j}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right), & \text{pre } i = j+1, j+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Zhrnutie - Jacobiho iteračná metóda

Sústava lineárnych rovníc daná maticovou rovnicou

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má pre diagonálne riadkovo dominantú maticu sústavy A konvergentnú iteračnú postupnosť konvergujúcu k presnému riešeniu pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}^{(0)}$ definovanú iteračným vzťahom

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} \right) / a_{i,i}, \qquad \text{pre } i = 1, 2, \ldots n,$$

maticovo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \left(\mathbf{b} - (L + U) \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} \right) \cdot D^{-1}.$$

Zhrnutie - Gaussova-Seidelova iteračná metóda

Sústava lineárnych rovníc daná maticovou rovnicou

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má pre diagonálne riadkovo dominantú maticu sústavy A konvergentnú iteračnú postupnosť konvergujúcu k presnému riešeniu pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}^{(0)}$ definovanú iteračným vzťahom

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{i>j} a_{i,j} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{i<j} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} \right) / a_{i,i}, \qquad \text{pre } i = 1, 2, \dots n,$$

maticovo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \left(\mathbf{b} - L \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} - U \cdot \mathbf{x}^{(k)} \right) \cdot D^{-1}.$$