Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Numerické riešenie nelineárnych systémov - Newtonova-Raphsonova metóda

Pavol ORŠANSKÝ

3. novembra 2023

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Sústavu nelineárnych rovníc

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Sústavu nelineárnych rovníc

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

môžeme vo vektorovom zápise zapísať v tvare

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \text{resp.} \qquad \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ je hľadané riešenie vyhovujúce sústave $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Uvažujme Taylorov rozvoj i-tej zložky funkcie $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, pre ktorú akiste platí

$$f_i(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\delta x_j + \underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}(\delta x_j)^2 + \ldots}_{\text{ozn. } \Theta(\delta\mathbf{x}^2, \delta\mathbf{x}^3, \ldots)}$$

Ak zanedbáme sčítance druhých a vyšších derivácií, t. j.

$$\Theta\left(\delta\mathbf{x}^2, \delta\mathbf{x}^3, \ldots\right) = 0,$$

dostávame odhad pre i-tú zložku vektorovej funkcie $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v tvare

$$f_i(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\delta x_j.$$

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Rozpísaním po zložkách môžeme tento odhad v maticovom tvare zapísať ako

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) \approx \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix},$$

ktorý pri označení **Jacobiho matice** $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, má tvar

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x}.$$

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Na daný odhad aplikujeme rovnosť $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, a preto

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad /-\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

a následne rovnosť upravíme na požadovaný tvar

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad /\cdot J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \qquad \text{(násobenie zľava)} \\ \delta\mathbf{x} &= -J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad /+\mathbf{x} \\ \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} &= \mathbf{x} - J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

odkiaľ pri označení, $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, dostávame hľadanú iteračnú postupnosť v tvare

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),$$

alebo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta\mathbf{x}^{(k)}, \qquad \text{kde} \qquad \delta\mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Numerické riešenie systémov nelineárnych rovníc

Poznámka

Predošlá metodika riešenia sústav nelineárnych rovníc, určená iteračnou postupnosťou

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),$$

sa nazýva aj **Newtonova-Raphsonova metóda**.

Poznámka

V prípade rôzneho počtu neznámych a rovníc sústavy je vhodnejšie použiť namiesto inverznej matice J^{-1} tzv. **pseudoinverznú maticu** *definovanú ako*

$$J^{-} = \left(J^{T} \cdot J\right)^{-1} \cdot J^{T},$$

ktorá je štvorcovou matica.

Príklad (1a)

Pomocou Newtonovej-Raphsonovej metódy nájdime približné riešenie nelineárnej sústavy rovníc

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - 10 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_2 + 3x_1 x_2^2 - 57 = 0,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$.

Príklad (1b)

Iteračný vzťah Newtonovej-Raphsonovej metódy je

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),$$

kde vektorová funkcia sústavy má tvar

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k\right) = \mathbf{f}\left(x_1, x_2\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1, x_2\right) \\ f_2\left(x_1, x_2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 x_2 - 10 \\ x_2 + 3x_1 x_2^2 - 57 \end{pmatrix}$$

a Jacobiho matica sústavy má tvar

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ 3x_2^2 & 1 + 6x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1c)

Zvolíme si počiatočnú aproximáciu (tak, aby inverzná matica $J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ *existovala, t. j.* $\det J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \neq 0$*) a vypočítame hodnotu v nasledujúcom člene*

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.6000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} -10.0000 \\ -56.4000 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0.6000 & 0.0000 \\ 1.0800 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 1.6667 & 0.0000 \\ -1.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0000 \\ 0.6000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(0)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1.6667 & 0.0000 \\ -1.8000 & 1.0000 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -10.0000 \\ -56.4000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)} = \begin{pmatrix} 16.6667 \\ 39.0000 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1d)

Pre vektor $\mathbf{x}^{(1)}$ *dostávame*

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 16.6667 \\ 39.0000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 917.7778 \\ 76032.0000 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 72.3333 & 16.6667 \\ 4563.0000 & 3901.0000 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 0.0189 & -0.0001 \\ -0.0221 & 0.0004 \end{pmatrix},$$

preto platí

$$\mathbf{x}^{(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.6667 \\ 39.0000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(1)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0189 & -0.0001 \\ -0.0221 & 0.0004 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 917.7778 \\ 76032.0000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)} = \begin{pmatrix} 5.4449 \\ 32.6357 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1e)

A opäť

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5.4449 \\ 32.6357 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 197.3461 \\ 17373.6119 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 43.5255 & 5.4449 \\ 3195.2633 & 1067.1935 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} 0.0367 & -0.0002 \\ -0.1100 & 0.0015 \end{pmatrix}$$

odkiaľ

$$\mathbf{x}^{(3)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5.4449 \\ 32.6357 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(2)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0367 & -0.0002 \\ -0.1100 & 0.0015 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 197.3461 \\ 17373.6119 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.4518 \\ 28.3116 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1f)

A tak ďalej

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.4518 \\ 28.3116 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 33.2112 \\ 3462.4306 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 31.22153 & 1.4518 \\ 2404.6471 & 247.6207 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 0.0584 & -0.0003 \\ -0.5673 & 0.0074 \end{pmatrix}$$

z čoho dostávame

$$\mathbf{x}^{(4)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.4518 \\ 28.3116 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(3)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0584 & -0.0003 \\ -0.5673 & 0.0074 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(3)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 33.2112 \\ 3462.4306 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(3)}\right)} = \begin{pmatrix} 0.6975 \\ 21.6537 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1g)

Pokračujeme

$$\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.6975 \\ 21.6537 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(4)}\right) = \begin{pmatrix} 5.5909 \\ 945.8468 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(4)}\right) = \begin{pmatrix} 23.0487 & 0.6975 \\ 1406.6420 & 91.6261 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(4)}\right) = \begin{pmatrix} 0.0810 & -0.0006 \\ -1.2441 & 0.0204 \end{pmatrix}$$

odkiaľ

$$\mathbf{x}^{(5)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.6975 \\ 21.6537 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(4)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.0810 & -0.0006 \\ -1.2441 & 0.0204 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(4)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 5.5909 \\ 945.8468 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(4)}\right)} = \begin{pmatrix} 0.8280 \\ 9.3281 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1h)

Nakoľko platí

$$\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.8280 \\ 9.3281 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = \begin{pmatrix} -1.5908 \\ 168.4679 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = \begin{pmatrix} 10.9841 & 0.8280 \\ 261.0411 & 47.3416 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = \begin{pmatrix} 0.1558 & -0.0027 \\ -0.8591 & 0.0361 \end{pmatrix}$$

bude

$$\mathbf{x}^{(6)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8280 \\ 9.3281 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(5)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1558 & -0.0027 \\ -0.8591 & 0.0361 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(5)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} -1.5908 \\ 168.4679 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(5)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.5349 \\ 1.8717 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1ch)

Pre ďalší člen máme

$$\mathbf{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.5349 \\ 1.8717 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(6)}\right) = \begin{pmatrix} -4.7712 \\ -38.9968 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(6)}\right) = \begin{pmatrix} 4.9415 & 1.5349 \\ 10.5098 & 18.2372 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(6)}\right) = \begin{pmatrix} 0.2465 & -0.0207 \\ -0.1420 & 0.0668 \end{pmatrix}$$

z čoho

$$\mathbf{x}^{(7)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.5349 \\ 1.8717 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(6)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2465 & -0.0207 \\ -0.1420 & 0.0668 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(6)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} -4.7712 \\ -38.9968 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(6)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.9020 \\ 3.7985 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1i)

Z hodnôt

$$\mathbf{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.9020 \\ 3.7985 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(7)}\right) = \begin{pmatrix} 0.8420 \\ 29.1255 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(7)}\right) = \begin{pmatrix} 7.6024 & 1.9020 \\ 43.2855 & 44.3473 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(7)}\right) = \begin{pmatrix} 0.1740 & -0.0075 \\ -0.1699 & 0.0298 \end{pmatrix}$$

máme

$$\mathbf{x}^{(8)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.9020 \\ 3.7985 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(7)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1740 & -0.0075 \\ -0.1699 & 0.0298 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(7)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8420 \\ 29.1255 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(7)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.9728 \\ 3.0726 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1j)

Funkčné hodnoty a Jacobiho matica sú

$$\mathbf{x}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.9728 \\ 3.0726 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(8)}\right) = \begin{pmatrix} -0.0464 \\ 1.9465 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(8)}\right) = \begin{pmatrix} 7.0182 & 1.9728 \\ 28.3220 & 37.3696 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(8)}\right) = \begin{pmatrix} 0.1811 & -0.0096 \\ -0.1372 & 0.0340 \end{pmatrix}$$

preto zrejme

$$\mathbf{x}^{(9)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.9728 \\ 3.0726 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(8)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1811 & -0.0096 \\ -0.1372 & 0.0340 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(8)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} -0.0464 \\ 1.9465 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(8)}\right)} = \begin{pmatrix} 1.9998 \\ 3.0000 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1k)

Nakoľko pre ostatú hodnotu člena iterácie platí

$$\mathbf{x}^{(9)} = \begin{pmatrix} 1.9998 \\ 3.0000 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(9)}\right) = \begin{pmatrix} -0.0012 \\ -0.0045 \end{pmatrix},$$

$$J_{\mathbf{f}}\left(\mathbf{x}^{(9)}\right) = \begin{pmatrix} 6.9997 & 1.9998 \\ 27.0001 & 36.9969 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(9)}\right) = \begin{pmatrix} 0.1805 & -0.0098 \\ -0.1317 & 0.0341 \end{pmatrix}$$

bude približné riešenie

$$\mathbf{x}^{(10)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.9998 \\ 3.0000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^{(9)}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0.1805 & -0.0098 \\ -0.1317 & 0.0341 \end{pmatrix}}_{J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(9)}\right)} \underbrace{\begin{pmatrix} -0.0012 \\ -0.0045 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(9)}\right)} = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 3.0000 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1l)

Nakoľko platí

$$\max\left|\mathbf{x}^{(10)}-\mathbf{x}^{(9)}\right| = \max\left|\begin{pmatrix} 2.0000 \\ 3.0000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.9998 \\ 3.0000 \end{pmatrix}\right| = \max\begin{pmatrix} 0.0002 \\ 0.0000 \end{pmatrix} < 0.01 = \varepsilon,$$

približné riešenie je

$$\mathbf{x}^{(10)} \doteq \begin{pmatrix} 2.00 \\ 3.00 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}.$$

Príklad (1m)

Priebežné výsledky v tabuľke ešte raz

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.0000	0.6000
1	16.6667	39.0000
2	5.4449	32.6357
3	1.4518	28.3116
4	0.6975	21.6537
5	0.8280	9.3281
6	1.5349	1.8717
7	1.9020	3.7985
8	1.9728	3.0726
9	1.9998	3.0000
10	2.0000	3.0000

Zhrnutie

Iteračnú postupnosť **Newtonovej-Raphsonovej metódy** má tvar

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),$$

alebo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta \mathbf{x}^{(k)},$$

kde

$$\delta \mathbf{x}^{(k)} = -J_{\mathbf{f}}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right),$$

pričom $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ je **Jacobiho matica sústavy**.