Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Numerické riešenie nelineárnej rovnice

Pavol ORŠANSKÝ

24. októbra 2023

Numerické riešenie nelineárnej rovnice

V praxi sa často stretávame s problematikou riešenia nelineárnych[1] rovníc

$$f(x) = 0.$$

[1] Riešenie lineárnych rovníc spadá do oblasti lineárnej algebry, kde sa riešenia hľadajú analytickými metódami.

Numerické riešenie nelineárnej rovnice

V praxi sa často stretávame s problematikou riešenia nelineárnych[1] rovníc

$$f(x) = 0.$$

Popíšeme jednotlivé numerické metódy riešenia nelineárnych rovníc, ich konvergenciu a podmienkami za akých konvergujú, ako aj samotnou rýchlosťou konvergencie týchto jednotlivých metód.

[1] Riešenie lineárnych rovníc spadá do oblasti lineárnej algebry, kde sa riešenia hľadajú analytickými metódami.

Numerické riešenie nelineárnej rovnice

V praxi sa často stretávame s problematikou riešenia nelineárnych[1] rovníc

$$f(x) = 0.$$

Popíšeme jednotlivé numerické metódy riešenia nelineárnych rovníc, ich konvergenciu a podmienkami za akých konvergujú, ako aj samotnou rýchlosťou konvergencie týchto jednotlivých metód.

Numerickým riešením nelineárnej rovnice budeme mať na mysli hľadanie koreňa rovnice

$$f(x) = 0,$$

na intervale $[a, b]$ (t. j. nájsť $\xi \in [a, b]$, vyhovujúce predpisu rovnice $f(\xi) = 0$).

[1] Riešenie lineárnych rovníc spadá do oblasti lineárnej algebry, kde sa riešenia hľadajú analytickými metódami.

Numerické riešenie nelineárnej rovnice

Predpokladajme spojitosť funkcie na intervale $[a, b]$ a existenciu jediného koreňa na tomto intervale.

Ak tomu tak nie je, treba nájsť podintervaly, na ktorých tomu tak je. To znamená nájsť body nespojitosti a rozdeliť nimi vyšetrovaný interval, resp. **separovať**[2] jednotlivé korene na intervale $[a, b]$.

V ďalšom, preto predpokladáme spojitosť funkcie $f(x)$ na intervale $[a, b]$ a existenciu jediného koreňa.

[2] Proces separácie koreňov je vo všeobecnosti dosť náročná úloha. Samotná myšlienka lokalizácie koreňa je v podstate predmetom tejto kapitoly, a preto sa budeme zaoberať prípadmi, kedy na danom intervale sa bude nachádzať iba jeden koreň.

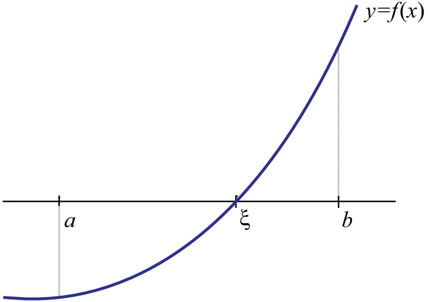
Metóda polenia intervalu (bisekcie)

Veta (Bolzanova veta)

Nech je funkcia $f(x)$ na intervale $[a, b]$ spojitá a nech platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Potom na intervale $[a, b]$ existuje aspoň jeden koreň ξ rovnice $f(x) = 0$.



Metóda polenia intervalu (bisekcie)

Počiatočná iterácia

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Ak

$$f(a)\cdot f(x_0) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad b \to x_0,$$

inak (t. j.: $f(a)\cdot f(x_0) > 0$, resp. $f(x_0)\cdot f(b) < 0$)

$$a \to x_0.$$

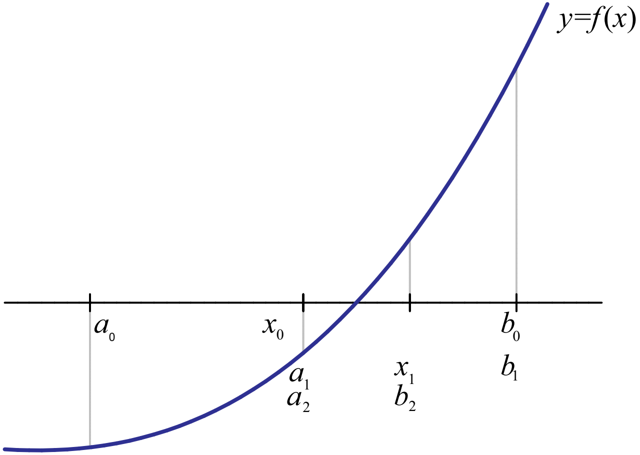
Dostávame nový interval $[a_1, b_1]$ a pokračujeme analogicky, teda

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, \dots$$

Takto vytvárame **iteračnú postupnosť** $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, pre ktorú platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$.
Pri predom zvolenej presnosti ε práve popísaný iteračný proces ukončíme, ak je presnosť postačujúca, t. j.:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

Metóda polenia intervalu (bisekcie)



Obr.: Metóda polenia intervalu - Bisekcie

Metóda polenia intervalu (bisekcie) - PRÍKLAD

Príklad (1.a)

Nájdime na intervale $[0,1]$ *koreň rovnice s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.5000	1.0000	$-$	$-$	$+$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Metóda polenia intervalu (bisekcie) - PRÍKLAD

Príklad (1.a)

Nájdime na intervale $[0,1]$ *koreň rovnice s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$

$$\mathrm{e}^x + x^2 - 3 = 0.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.5000	1.0000	$-$	$-$	$+$
1	0.5000	0.7500	1.0000	$-$	$-$	$+$
2						
3						
4						
5						
6						

Metóda polenia intervalu (bisekcie) - PRÍKLAD

Príklad (1.a)

Nájdime na intervale $[0,1]$ *koreň rovnice s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.5000	1.0000	$-$	$-$	$+$
1	0.5000	0.7500	1.0000	$-$	$-$	$+$
2	0.7500	0.8750	1.0000	$-$	$+$	$+$
3						
4						
5						
6						

Príklad (1.a)

Nájdime na intervale $[0,1]$ *koreň rovnice s presnosťou* $\varepsilon = 0.01$

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.5000	1.0000	$-$	$-$	$+$
1	0.5000	0.7500	1.0000	$-$	$-$	$+$
2	0.7500	0.8750	1.0000	$-$	$+$	$+$
3	0.7500	0.8125	0.8750	$-$	$-$	$+$
4						
5						
6						

Metóda polenia intervalu (bisekcie) - PRÍKLAD

Príklad (1.b)

Podobne by sme pokračovali ďalej ...

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.5000	1.0000	$-$	$-$	$+$
1	0.5000	0.7500	1.0000	$-$	$-$	$+$
2	0.7500	0.8750	1.0000	$-$	$+$	$+$
3	0.7500	0.8125	0.8750	$-$	$-$	$+$
4	0.8125	0.8438	0.8750	$-$	$+$	$+$
5	0.8125	0.8282	0.8438	$-$	$-$	$+$
6	0.8282	0.8359	0.8438			

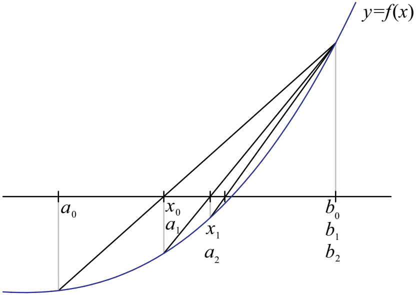
V tomto kroku môžeme algoritmus ukončiť, keďže platí
$|x_6 - x_5| = |0.8359 - 0.8281| = 0.0078 < 0.01 = \varepsilon$.
Približné riešenie s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *je* $x_6 \doteq 0.84$.

Metóda regula falsi

Princíp metódy je podobný algoritmu polenia intervalu, avšak budeme sa k presnému riešeniu blížiť iteračnou postupnosťou tvorenou priesečníkmi funkčných hodnôt krajných bodov intervalu $(a_k, f(a_k))$ a $(b_k, f(b_k))$ a osou x-ovou. Teda bude platiť

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(b_k).$$

Z intervalov $[a_k, x_k]$ a $[x_k, b_k]$ vyberieme ten, ktorý obsahuje koreň ξ.



Metóda regula falsi

Ak platí

$$f(a_k)\cdot f(x_k)<0, \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1}=a_k, \qquad b_{k+1}=x_k,$$

ak naopak platí

$$f(a_k)\cdot f(x_k)>0), \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1}=x_k, \qquad b_{k+1}=b_k,$$

ak by $f(x_k)=0$, proces ukončíme, našli sme koreň rovnice.

Iteračnú postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ **metódy reguli falsa**, definovanú vzťahom

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)}\cdot f\left(x_k\right).$$

ukončíme opäť, ak pre vopred stanovenú presnosť ε, bude platiť[3]

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon.$$

[3] Samozrejme, že platnosť podmienky predpokladáme po vykonaní istého množstva „štartovacích" krokov.

Príklad (2.)

S presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *nájdime na intervale* $[0, 1]$ *koreň rovnice*

$$\mathrm{e}^x + x^2 - 3 = 0.$$

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0.0000	0.7358	1.0000	-2.0000	-0.3716	0.7183
1	0.7358	0.8259	1.0000	-0.3716	-0.0341	0.7183
2	0.8259	0.8338	1.0000	-0.0341	-0.0029	0.7183

Iteračný proces ukončíme, nakoľko platí

$$|x_2 - x_1| = |0.8338 - 0.8259| = 0.0079 < 0.01 = \varepsilon,$$

a teda za približné riešenie považujeme hodnotu $x_2 \doteq 0.83$.

Definícia (Pevný bod zobrazenia)

Nech $f : X \to X$ *je zobrazenie.*
Bod ξ *nazveme* **pevným bodom zobrazenia** f*, ak platí*

$$f(\xi) = \xi.$$

Pevný bod funkcie je taký bod (číslo), ktoré sa v zobrazení danom funkciou $f(x)$, zobrazí sám na seba. Graficky ide o priesečníky grafu funkcie $f(x)$ s osou $y = x$. Typickým príkladom pevného bodu pre funkciu $f(x) = x^3$ sú body (čísla) $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ a $\xi_3 = 1$:

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= (-1)^3 = -1 = \xi_1, \\ f(\xi_2) &= 0^3 = 0 = \xi_2, \\ f(\xi_3) &= 1^3 = 1 = \xi_3. \end{aligned}$$

Metóda prostej iterácie

Definícia (Kontraktívne zobrazenie)

Nech (X, d) *je metrický priestora, a nech je dané zobrazenie* $f : A \to A$, $A \subset X$.
Toto zobrazenie sa nazýva **kontraktívne zobrazenie**, *ak existuje reálna konštanta* $0 < q < 1$ *taká, že* $\forall x_1, x_2 \in A$ *platí*

$$d\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \leq q \cdot d\left(x_1, x_2\right).$$

Poznámka (Kontraktívna funkcia)

Funkcia je kontraktívna vtedy a len vtedy, keď spĺňa Lipschitzovu podmienku pre

$$0 < q < 1.$$

Metóda prostej iterácie

Veta (Banachova veta o pevnom bode)

Nech (X, d) *je úplný metrický priestor.*
Nech $f : X \to X$ *je kontraktívne zobrazenie.*
Potom pre toto zobrazenie existuje iba jeden pevný bod $\xi = f(\xi)$.
A tiež pre každé $x \in X$ *platí*

$$f^k(x) \to \xi, \qquad k \to \infty,$$

kde symbol f^k *predstavuje* k*-tú iteráciu zobrazenia* f, *pričom pre rýchlosť konvergencie tejto iterácie platí*

$$d\left(\xi, f^k(x)\right) \leq q^k \cdot d(\xi, x).$$

Metóda prostej iterácie

Z vyššie uvedeného vyplýva, že si úlohu nájdenia koreňa ξ rovnice

$$f(x) = 0$$

transformujeme na tvar

$$x = \varphi(x)$$

a budeme hľadať pevný bod ξ funkcie $\varphi(x)$.

Ak je funkcia na hľadanom intervale kontraktívna, existuje na ňom jediný jej pevný bod, do ktorého naviac konverguje postupnosť tvorená práve týmto zobrazením, pri ľubovoľnej voľbe počiatočnej aproximácii z tohto intervalu.

Túto podmienku zaistíme nasledujúcou vetou.

Metóda prostej iterácie

Veta

Nech funkcia $\varphi(x)$ *zobrazuje* $[a,b]$ *do seba a má na* $[a,b]$ *deriváciu.*
Potom, ak existuje číslo $q \in (0,1)$ *také, že platí*

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q, \qquad \forall x \in [a,b],$$

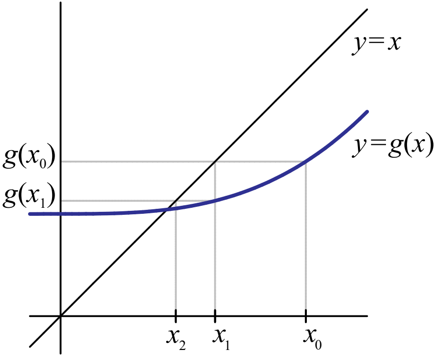
existuje na $[a,b]$ **jediný pevný bod** ξ *funkcie* $\varphi(x)$ *a* **iteračná postupnosť**

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

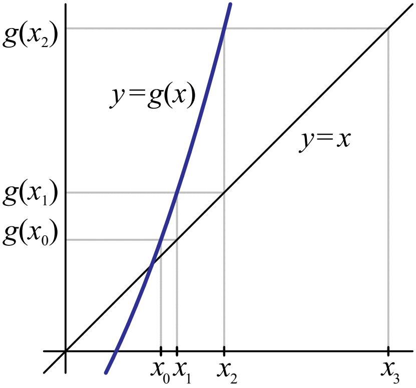
konverguje pre ľubovolnú počiatočnú aproximáciu $x_0 \in [a,b]$ *a pre odhad chyby platí*

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \xi| &\le \frac{q}{1-q}\left|x_{k+1} - x_k\right|, \\ |x_{k+1} - \xi| &\le \frac{q^{k+1}}{1-q}\left|x_1 - x_0\right|. \end{aligned}$$

Metóda prostej iterácie - Kontraktívna a nekontraktívna funkcia



Obr.: Metóda konverguje



Obr.: Metóda diverguje

Metóda prostej iterácie - PRÍKLAD

Príklad (3.a)

Metódou prostej iterácie nájdime na intervale $[-2,-1]$ *koreň rovnice*

$$e^x + x^2 - 3 = 0$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$.
Zadanú rovnicu si upravíme na vhodý tvar

$$\begin{aligned} f(x) = e^x + x^2 - 3 &= 0, \\ x^2 &= 3 - e^x, \\ x &= \pm\sqrt{3 - e^x}. \end{aligned}$$

Zrejme budeme hľadať pevný bod funkcie, nakoľko hľadáme záporný koreň na $[-2,-1]$

$$\varphi(x) = -\sqrt{3 - e^x}.$$

Metóda prostej iterácie - PRÍKLAD

Príklad (3.b)

Overíme podmienku pre konvergenciu iteračnej postupnosti $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. *Zrejme*

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{3 - \mathrm{e}^x}}.$$

Nájdeme maximum $|\varphi'(x)|$ *na intervale* $[-2, -1]$. *Na tomto intervale platí*

$$\varphi''(x) = \frac{\mathrm{e}^x (6 - \mathrm{e}^x)}{4(3 - \mathrm{e}^x)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

čiže derivácia $\varphi'(x)$ *je na* $[-2, -1]$ *rastúca a maximum má v bode* -1, *t. j.*

$$\varphi'(-1) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-1}}} \leq 0.12 = q < 1.$$

Metóda prostej iterácie - PRÍKLAD

Príklad (3.c)

Overíme ešte, či sa funkcia zobrazuje na intervale $[-2, -1]$ *do seba.*
Kedže je na tomto intervale monotónna, stačí overiť, či sa zobrazia krajné body intervalu do intervalu $[-2, -1]$,

$$\begin{aligned}
\varphi(-2) &= -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-2}} \doteq -1.69 \in [-2, -1], \\
\varphi(-1) &= -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-1}} \doteq -1.62 \in [-2, -1].
\end{aligned}$$

Metóda prostej iterácie - PRÍKLAD

Príklad (3.d)

Keďže je konvergencia zaručená pre ľubovoľné $x_0 \in [-2, -1]$, *zvolíme si napríklad* $x_0 = -2$ *a podľa iteračného vzťahu dostávame iteračnú postupnosť*

$$\varphi\left(x_{k+1}\right) = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{x_k}}$$

k	x_k
0	$x_0 = -2.0000$
1	$x_1 = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{x_0}} = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-2.0000}} = -1.6925$
2	$x_2 = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{x_1}} = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-1.6925}} = -1.6781$
3	$x_3 = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{x_2}} = -\sqrt{3 - \mathrm{e}^{-1.6781}} = -1.6773$

Proces ukončíme, nakoľko platí $|x_3 - x_2| = |-1.6773 + 1.6781| = 0.0008 < 0.01 = \varepsilon$ *približným riešením je* $x_3 \doteq -1.68$.

Metóda sečníc

Označme krajné body intervalu $x_0 = a$ a $x_1 = b$.

Bodmi $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ vedieme sečnicu s osou x-ovou, priesečník označíme x_2.

Vedieme ďalšiu sečnicu bodmi $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ a jej priesečník s osou x-ovou označíme x_3, atď.

Celý algoritmus metódy sečníc môžeme zhrnúť do **iteračného dvojkrokového vzťahu**

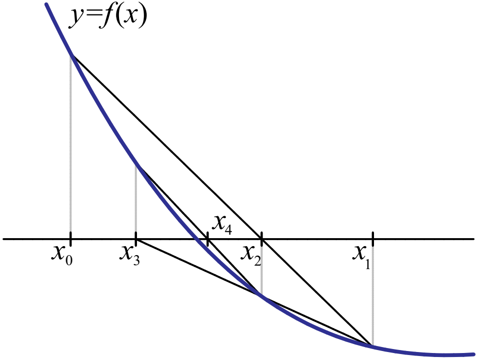
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

kde $x_0 = a$ a $x_1 = b$.

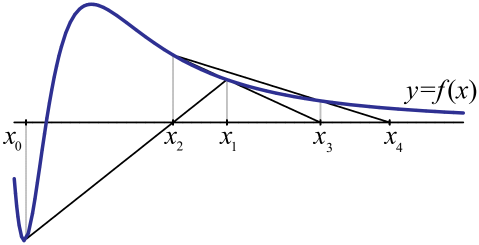
Iteračný proces ukončíme opäť, ak

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

Metóda sečníc



Obr.: Metóda konverguje



Obr.: Metóda diverguje

Metóda sečníc - PRÍKLAD

Príklad (4.a)

Metódou sečníc riešme s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *na intervale* $[-2, -1]$ *rovnicu*

$$\mathrm{e}^x + x^2 - 3 = 0.$$

Za prvotné aproximácie si zvolíme krajné body intervalu, t. j.

$$\begin{aligned} x_0 &= -2, \\ x_1 &= -1. \end{aligned}$$

Ďalšie členy iteračnej postupnosti vypočítame podľa iteračného vzťahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Príklad (4.b)

A teda platí

$$\begin{aligned}
x_2 &= -1.0000 - \frac{-1.0000-(-2.0000)}{f(-1.0000)-f(-2.0000)}\cdot f(-1.0000) = \color{red}{-1.5898},\\
x_3 &= -1.5898 - \frac{-1.5898-(-1.0000)}{f(-1.5898)-f(-1.0000)}\cdot f(-1.5898) = \color{red}{-1.7060},\\
x_4 &= -1.7060 - \frac{-1.7060-(-1.5898)}{f(-1.7060)-f(-1.5898)}\cdot f(-1.7060) = \color{red}{-1.6763},\\
x_5 &= -1.6763 - \frac{-1.6763-(-1.7060)}{f(-1.6763)-f(-1.7060)}\cdot f(-1.6763) = \color{red}{-1.6772}.
\end{aligned}$$

$$|x_5 - x_4| = |-1.6772 - (-1.6763)| = 0.0009 < \varepsilon,$$

z vyššie uvedeného platí pre približné riešenie rovnice je $x_5 \doteq -1.68$.

Newtonova metóda dotyčníc

Pôvodný tvar nelineárnej rovnice

$$f\left(x\right)=0 \qquad /\cdot g\left(x\right) \qquad +x$$

upravíme na tvar, kde $g(x)$ je určitá (nateraz neznáma) funkcia, a celý rovnosť prepíšeme ako iteračný vzťah

$$\begin{aligned} x &= x+g\left(x\right)\cdot f\left(x\right), \\ \varphi\left(x\right) &= x+g\left(x\right)\cdot f\left(x\right) \end{aligned}$$

kde si funkciu $g\left(x\right)$ volíme tak, aby metóda čo najrýchlejšie konvergovala k presnému riešeniu, t. j. aby $\varphi'\left(x\right)$ bolo v okolí koreňa ξ blízke nule[4], čiže

$$\varphi'\left(x\right)=1+g'\left(x\right)\cdot f\left(x\right)+g\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)=0,$$

kedže riešime rovnicu $f\left(x\right)=0$, druhý sčítanec je nulový dostávame

$$1+g\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)=0.$$

[4]podmienka konvergencie iteračnej funkcie je $\left|\varphi'\left(x\right)\right|<q$, kde $q\in[0,1)$

Newtonova metóda dotyčníc - Fourierova podmienka

Odkiaľ

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

Iteračná funkcia má teda tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Iteračný vzťah Newtonovej metódy dotyčníc má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Newtonova metóda dotyčníc - Fourierova podmienka

Veta (Fourierova podmienka)

Nech v intervale $[a, b]$ *leží jediný koreň rovnice* $f(x) = 0$.
Nech $f'(x)$ *a* $f''(x)$ *sú spojité a nemenia znamienko na intervale* $[a, b]$.
Ak zvolíme počiatočnú aproximáciu $x_0 \in [a, b]$ *a platí*

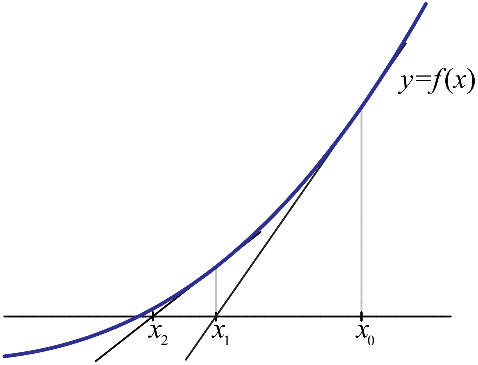
$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

potom pre túto aproximáciu Newtonova metóda konverguje.

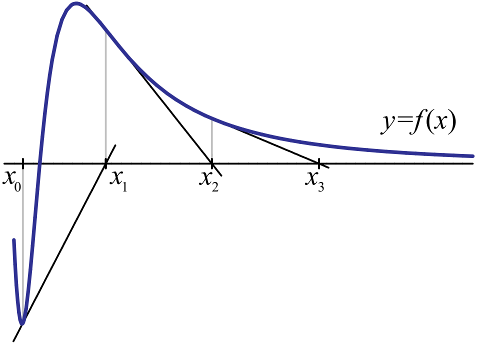
Poznámka

Fourierova podmienka zaručuje konvergenciu aj pre metódu sečníc.

Newtonova metóda dotyčníc



Obr.: Metóda konverguje



Obr.: Metóda diverguje

Newtonova metóda dotyčníc - PRÍKLAD

Príklad (5.a)

Riešme s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ *na intervale* $[-2, -1]$ *rovnicu*

$$\mathrm{e}^x + x^2 - 3 = 0.$$

Zrejme na $[-2, -1]$ $f'(x)$ *a* $f''(x)$ *nemenia znamienko, t. j.*

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 2x < 0, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^x + 2 > 0.$$

Keďže $f(-2) = \mathrm{e}^{-2} + (-2)^2 - 3 > 0$ *a* $f(-1) = \mathrm{e}^{-1} + (-2)^1 - 3 < 0$, *volíme za počiatočnú aproximáciu* $x_0 = -2$.

Príklad (5.b)

Pre ďalšie členy iteračnej postupnosti dostávame

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2.0000 - \frac{\mathrm{e}^{-2.0000} + (-2.0000)^2 - 3}{\mathrm{e}^{-2.0000} + 2\cdot(-2.0000)} = -1.7062,\\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1.7062 - \frac{\mathrm{e}^{-1.7062} + (-1.7062)^2 - 3}{\mathrm{e}^{-1.7062} + 2\cdot(-1.7062)} = -1.6775,\\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1.6775 - \frac{\mathrm{e}^{-1.6775} + (-1.6775)^2 - 3}{\mathrm{e}^{-1.6775} + 2\cdot(-1.6775)} = -1.6772.
\end{aligned}$$

Keďže $|x_3 - x_2| = |-1.6772 - (-1.6775)| = |0.0003| < \varepsilon \Rightarrow$ *približné riešenie rovnice je* $x_3 \doteq -1.68$.

Zhrnutie I. - metóda bisekcie (polenia intervalu)

1.) Počiatočná aproximáciu je

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

2.) Ak

$$f(a) \cdot f(x_0) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad b \to x_0,$$

inak

$$f(a) \cdot f(x_0) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \to x_0.$$

Dostávame nový interval $[a_1, b_1]$ a pokračujeme analogicky bodom 1.), teda

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ldots$$

Pre takto vytvorenú **iteračnú postupnosť** $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \xi,$$

teda konverguje k presnému riešeniu.

Zhrnutie II. - metóda regula falsi

Ak platí

$$f(a_k) \cdot f(x_k) < 0, \qquad \Rightarrow \qquad b_{k+1} = x_k,$$

ak naopak platí

$$f(a_k) \cdot f(x_k) > 0), \qquad \Rightarrow \qquad a_{k+1} = x_k.$$

Pričom **iteračná postupnosť** $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ **metódy reguli falsa** je definovaná vzťahom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k).$$

Zhrnutie III. - metóda prostej iterácie

Úlohu nájdenia koreňa ξ rovnice

$$f(x) = 0$$

transformujeme na tvar

$$x = \varphi(x)$$

a budeme hľadať pevný bod ξ funkcie $\varphi(x)$.

Ak je funkcia na hľadanom intervale kontraktívna, existuje na ňom jediný jej pevný bod, do ktorého naviac konverguje postupnosť tvorená práve týmto zobrazením, pri ľubovoľnej voľbe počiatočnej aproximácii z tohto intervalu.

Pričom **iteračná postupnosť** $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ **metódy prostej iterácie** je definovaná vzťahom

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Zhrnutie IV. - metóda sečníc

Iteračná postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ **metódy sečníc** je definovaná iteračným dvojkrokovým vzťahom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

kde $x_0 = a$ a $x_1 = b$.

Zhrnutie V. - metóda dotyčníc

Iteračná postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ **Newtonovej metódy dotyčníc** je definovaná iteračným vzťahom

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2 \dots$$