Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

UNIZA

Stabilita a chyby numerických algoritmov

Pavol ORŠANSKÝ

18. októbra 2023

Numerické metódy

V odbornej praxi sa často stretávame s matematickým modelovaním procesov a ich simuláciou.

Numerické metódy

V odbornej praxi sa často stretávame s matematickým modelovaním procesov a ich simuláciou.

Pri týchto procesoch nutné riešiť sekundárne matematické úlohy, ktorých analytické riešenie nie je s praktických dôvodov možné alebo reálne.

Numerické metódy

V odbornej praxi sa často stretávame s matematickým modelovaním procesov a ich simuláciou.

Pri týchto procesoch nutné riešiť sekundárne matematické úlohy, ktorých analytické riešenie nie je s praktických dôvodov možné alebo reálne.

A teda sa pôvodná úloha transformuje na úlohu, ktorá konečným počtom krokov dospeje k približnému riešeniu s prípustnou odchýlkou, tzv. **aproximácia**.

Numerické metódy

V odbornej praxi sa často stretávame s matematickým modelovaním procesov a ich simuláciou.

Pri týchto procesoch nutné riešiť sekundárne matematické úlohy, ktorých analytické riešenie nie je s praktických dôvodov možné alebo reálne.

A teda sa pôvodná úloha transformuje na úlohu, ktorá konečným počtom krokov dospeje k približnému riešeniu s prípustnou odchýlkou, tzv. **aproximácia**.

Numerické metódy - rozumieme metódy získavania približných výsledkov s vopred stanovenou presnosťou.

Chyby numerických algoritmov

Chyby matematického modelu vznikajú **nahradením fyzikálneho deju matematickým modelom**, napr. popis reálneho fyzikálneho deju diferenciálnou rovnicou.

Chyby numerických algoritmov

Chyby matematického modelu vznikajú **nahradením fyzikálneho deju matematickým modelom**, napr. popis reálneho fyzikálneho deju diferenciálnou rovnicou.

Chyby vstupných dát nepresnosti **pri meraní vstupných fyzikálnych veličín** pre popis matematického modelu.

Chyby numerických algoritmov

Chyby matematického modelu vznikajú **nahradením fyzikálneho deju matematickým modelom**, napr. popis reálneho fyzikálneho deju diferenciálnou rovnicou.

Chyby vstupných dát nepresnosti **pri meraní vstupných fyzikálnych veličín** pre popis matematického modelu.

Chyby numerickej metódy vznikajú **pri náhrade matematického modelu jednoduchšou numerickou úlohou**, t. j. náhrada nekonečného procesu konečným (konečný počet krokov).

Chyby numerických algoritmov

Chyby matematického modelu vznikajú **nahradením fyzikálneho deju matematickým modelom**, napr. popis reálneho fyzikálneho deju diferenciálnou rovnicou.

Chyby vstupných dát nepresnosti **pri meraní vstupných fyzikálnych veličín** pre popis matematického modelu.

Chyby numerickej metódy vznikajú **pri náhrade matematického modelu jednoduchšou numerickou úlohou**, t. j. náhrada nekonečného procesu konečným (konečný počet krokov).

Chyby zaokrúhlovacie vznikajú **zaokrúhľovaním** na konečný počet desatinných miest. Tieto chyby sa môžu navzájom rušiť ale i kumulovať, a tým, pri veľkom počte operácií, úplne znehodnotiť výsledok.

Definícia chyby

Definícia (Chyba aproximácie)

Predpokladajme, že ξ je presné riešenie úlohy, a nech x je jej približné riešenie (aproximácia).
Potom

$$E(x) = \xi - x$$

sa nazýva **absolútna chyba aproximácie** x *a*

$$RE(x) = \frac{\xi - x}{x}$$

sa nazýva **relatívna chyba aproximácie** x.

Odhady chýb

Nakoľko presnú hodnotu zrejme nepoznáme, majú v numerických modeloch dôležitú úlohu tzv. **odhady chýb**.

Definícia (Odhad chyby)

Nezáporné číslo $ME(x)$ splňujúce

$$|\xi - x| \leq ME(x), \qquad \textit{resp.} \qquad \xi \in [x - ME(x), x + ME(x)]$$

sa nazýva **odhad absolútnej chyby aproximácie** x *a*
nezáporné číslo $MR(x)$ splňujúce

$$\frac{|\xi - x|}{|x|} \leq MR(x), \qquad x \neq 0,$$

sa nazýva **odhad relatívnej chyby aproximácie** x.

Zaokrúhľovanie - zaokrúhlovacie chyby

Definícia (Správne zaokrúhlené číslo)

Nech x je reálne číslo s vo všeobecnosti nekonečným dekadickým vyjadrením (napr. iracionálne číslo).
Potom $x^{(d)}$, ktoré má d desatinných miest, je **správne zaokrúhlenou hodnotou čísla** *x, ak platí*

$$\left|x - x^{(d)}\right| \leq 0.5 \cdot 10^{-d}.$$

Zaokrúhľovanie - zaokrúhlovacie chyby

Definícia (Správne zaokrúhlené číslo)

Nech x je reálne číslo s vo všeobecnosti nekonečným dekadickým vyjadrením (napr. iracionálne číslo).
Potom $x^{(d)}$, ktoré má d desatinných miest, je **správne zaokrúhlenou hodnotou čísla** *x, ak platí*

$$\left|x - x^{(d)}\right| \leq 0.5 \cdot 10^{-d}.$$

Poznámka (Šírenie zaokrúhľovacej chyby)

Zaokrúhľovacia chyba sa počas početných operácií numerického modelu neustále šíri.
V lepšom prípade sa tieto chyby v dôsledku navzájom opačných znamienok rušia, ale to však nie je možné nijakým spôsobom zaručiť, a preto predpokladáme horší variant.
Príklad značného šírenia zaokrúhľovacej chyby je odčítania veľmi blízkych čísel, alebo delenie číslom blízkym nule, atď., ktorým sa budeme snažiť, ak to bude možné, vyhnúť.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.
Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojité hovoríme, že numerická úloha je **korektná úloha**.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.

Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojité hovoríme, že numerická úloha je **korektná úloha**.

Korektná úloha sa nazýva **dobre podmienenou úlohou** práve vtedy, ak platí

$$c_p = \frac{\text{relatívna chyba výstupných dát}}{\text{relatívna chyba vstupných dát}} \approx 1,$$

kde číslo c_p sa nazíva **číslo podmienenosti úlohy**.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.
Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojité hovoríme, že numerická úloha je **korektná úloha**.
Korektná úloha sa nazýva **dobre podmienenou úlohou** práve vtedy, ak platí

$$c_p = \frac{\text{relatívna chyba výstupných dát}}{\text{relatívna chyba vstupných dát}} \approx 1,$$

kde číslo c_p sa nazíva **číslo podmienenosti úlohy**.
Algoritmus málo citlivý na poruchy vstupných údajov sa nazýva **dobre podmienený algoritmus**.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.
Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojité hovoríme, že numerická úloha je **korektná úloha**.
Korektná úloha sa nazýva **dobre podmienenou úlohou** práve vtedy, ak platí

$$c_p = \frac{\text{relatívna chyba výstupných dát}}{\text{relatívna chyba vstupných dát}} \approx 1,$$

kde číslo c_p sa nazíva **číslo podmienenosti úlohy**.
Algoritmus málo citlivý na poruchy vstupných údajov sa nazýva **dobre podmienený algoritmus**.
Algoritmus s malým vplyvom zaokrúhľovacích chýb na výsledky nazývame **numericky stabilný algoritmus**.

Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta.
Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojité hovoríme, že numerická úloha je **korektná úloha**.
Korektná úloha sa nazýva **dobre podmienenou úlohou** práve vtedy, ak platí

$$c_p = \frac{\text{relatívna chyba výstupných dát}}{\text{relatívna chyba vstupných dát}} \approx 1,$$

kde číslo c_p sa nazíva **číslo podmienenosti úlohy**.
Algoritmus málo citlivý na poruchy vstupných údajov sa nazýva **dobre podmienený algoritmus**.
Algoritmus s malým vplyvom zaokrúhľovacích chýb na výsledky nazývame **numericky stabilný algoritmus**.
Dobre podmienený a numericky stabilný algoritmus sa nazýva **stabilný algoritmus**.

Čierna skrinka

Čierna skrinka je v kybernetike označenie zariadenia, alebo všeobecne akéhokoľvek javu, u ktorého je zrejmé, ako sa chová či prejavuje navonok, ale nevieme alebo nás nezaujíma, čo všetko musí prebiehať vo vnútri tohto zariadenia.

Obr.: Vizualizácia stabilného algoritmu čiernej skrinky