Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Náhodná premenná a rozdelenie jej pravdepodobnosti

Pavol ORŠANSKÝ

12. októbra 2023

Náhodná premenná (veličina)

Definícia (Náhodná premenná)

Pojmom náhodná premenná (veličina) označujeme premennú, ktorej hodnota je určená výsledkom náhodného pokusu.
Opakovaním pokusu dochádza vplyvom náhodných dejov ku zmenám náhodnej premennej (veličiny) a jej hodnotu nemožno pred prevedením pokusu určiť, a preto náhodná premenná (veličina) je určená rozdelením pravdepodobnosti.

Poznámka

Označovať ju budeme ξ a jej hodnoty malými arabskými písmenami napr. x, y, z apod.

Poznámka

Symbol $P(\xi = x)$ (resp. $P(\xi < x)$) bude znamenať pravdepodobnosť s akou náhodná veličina ξ nadobúda hodnotu x (resp. nadobúda hodnotu menšiu ako x).

Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny

Definícia (Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

Hovoríme, že náhodná veličina ξ *má diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti, ak existuje konečná alebo spočítateľná*[1] *množina reálnych čísel* $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, *takých že platí*

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(\xi = x_i\right) = 1.$$

Poznámka

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny je dané hodnotami
a pravdepodobnosťami, s ktorými tieto hodnoty nadobúda!

[1] Nanajvýš toľko prvková množina ako množina prirodzených čísel.

Príklad (1.a) Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

V osudí sú 2 biele a 3 červené guličky. Náhodne vyberieme 3 guličky.
Určime rozdelenie pravdepodobnosti počtu bielych guličiek v tomto náhodnom výbere!

Príklad (1.a) Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

V osudí sú 2 biele a 3 červené guličky. Náhodne vyberieme 3 guličky.
Určime rozdelenie pravdepodobnosti počtu bielych guličiek v tomto náhodnom výbere!

$$P(\xi = 0) \quad = \quad \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10},$$

Príklad (1.a) Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

V osudí sú 2 biele a 3 červené guličky. Náhodne vyberieme 3 guličky.
Určime rozdelenie pravdepodobnosti počtu bielych guličiek v tomto náhodnom výbere!

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10},$$

Príklad (1.a) Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

V osudí sú 2 biele a 3 červené guličky. Náhodne vyberieme 3 guličky.
Určime rozdelenie pravdepodobnosti počtu bielych guličiek v tomto náhodnom výbere!

$$
\begin{aligned}
P(\xi = 0) &= \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \\
P(\xi = 1) &= \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}, \\
P(\xi = 2) &= \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

Príklad (1.b) Diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny)

Získané výsledky zapíšeme do tabuľky rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ *nadobudajúcej hodnoty náhodného výberu a pravdepodobnosti, s ktorými tieto hodnoty nadobúda:*

x_i :	0	1	2
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

Všimnime si zároveň aj fakt, že suma jednotlivých pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej je rovná číslu 1*, t. j. je rovná pravdepodobnosti úplného systému javov.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} P(\xi = x_i) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 3)\\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1.\end{aligned}$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia (Distribučná funkcia náhodnej premennej)

Nech náhodná premenná ξ je definovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, α, P). Potom reálnu funkciu

$$F(x) = P(\xi < x), \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),$$

nazývame distribučná funkcia diskr0tnej náhodnej premennej.

Poznámka (Vlastnosti distribučnej funkcie náhodnej premennej)

Distribučná funkcia náhodnej premennej je funkcia

i) *neklesajúca,*

ii) *zľava spojitá,*

iii) *platí pre ňu*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad a \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.a))

Hodíme tri krát mincou. Pre náhodnú premennú ξ, ktorá predstavuje počet padnutí mince znakovou stranou nahor, určíme distribučnú funkciu.

$$P(\xi = 0) \quad = \quad P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.a))

Hodíme tri krát mincou. Pre náhodnú premennú ξ, ktorá predstavuje počet padnutí mince znakovou stranou nahor, určíme distribučnú funkciu.

$$\begin{aligned}
P(\xi = 0) &= P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \\
P(\xi = 1) &= P_3(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},
\end{aligned}$$

Príklad (2.a))

Hodíme tri krát mincou. Pre náhodnú premennú ξ, ktorá predstavuje počet padnutí mince znakovou stranou nahor, určíme distribučnú funkciu.

$$
\begin{aligned}
P(\xi = 0) &= P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \\
P(\xi = 1) &= P_3(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \\
P(\xi = 2) &= P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8},
\end{aligned}
$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.a))

Hodíme tri krát mincou. Pre náhodnú premennú ξ, ktorá predstavuje počet padnutí mince znakovou stranou nahor, určime distribučnú funkciu.

$$
\begin{aligned}
P(\xi = 0) &= P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\\
P(\xi = 1) &= P_3(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},\\
P(\xi = 2) &= P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8},\\
P(\xi = 3) &= P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.b))

x_i :	0	1	2	3
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$pre\ x < 0: \qquad F(x) = P(\xi < 0) = 0,$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.b))

x_i :	0	1	2	3
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} &\textit{pre } x < 0: && F(x) = P(\xi < 0) = 0, \\ &\textit{pre } 0 \leq x < 1: && F(x) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

Príklad (2.b))

x_i :	0	1	2	3
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
&\text{pre } x < 0: && F(x) = P(\xi < 0) = 0,\\
&\text{pre } 0 \le x < 1: && F(x) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{8},\\
&\text{pre } 1 \le x < 2: && F(x) = P(\xi < 2) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1)]\\
& && \quad = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8},
\end{aligned}$$

Príklad (2.b))

x_i :	0	1	2	3
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
&\textit{pre } x < 0: && F(x) = P(\xi < 0) = 0, \\
&\textit{pre } 0 \le x < 1: && F(x) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{8}, \\
&\textit{pre } 1 \le x < 2: && F(x) = P(\xi < 2) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1)] \\
& && \quad = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}, \\
&\textit{pre } 2 \le x < 3: && F(x) = P(\xi < 3) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2)] \\
& && \quad = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8},
\end{aligned}$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.b))

x_i :	0	1	2	3
$P(\xi = x_i)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$
\begin{aligned}
&\textit{pre } x < 0: && F(x) = P(\xi < 0) = 0,\\
&\textit{pre } 0 \le x < 1: && F(x) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{8},\\
&\textit{pre } 1 \le x < 2: && F(x) = P(\xi < 2) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1)]\\
& && \quad = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8},\\
&\textit{pre } 2 \le x < 3: && F(x) = P(\xi < 3) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2)]\\
& && \quad = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8},\\
&\textit{pre } 3 \le x: && F(x) = P(\xi < \infty) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2) \cup (\xi = 3)]\\
& && \quad = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.
\end{aligned}
$$

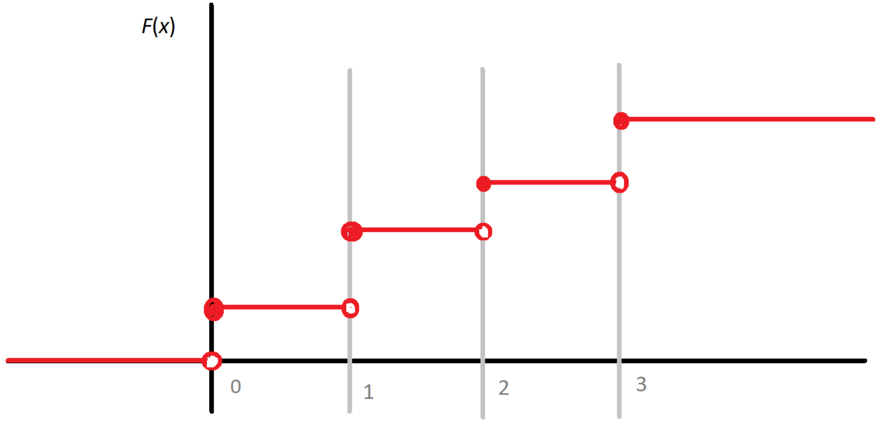
Príklad (2.c))

Distribučnú funkciu teda môžeme zapísať ako

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{pre } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \textit{pre } 0 \le x < 1, \\ \frac{4}{8}, & \textit{pre } 1 \le x < 2, \\ \frac{7}{8}, & \textit{pre } 2 \le x < 3, \\ 1, & \textit{pre } 3 \le x. \end{cases}$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Príklad (2.d))



Hustota spojitého rozdelenia náhodnej premennej ξ

Tak ako v prípade diskrétneho rozdelenia je rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ dané hodnotami, ktoré nadobúda a pravdepodobnosťami, s akými tieto nadobúda, tak v prípade spojitého rozdelenia je náhodná premenná daná kladnou reálnou funkciou $f(x)$ tzv. hustotou rozdelenia.

Hustota spojitého rozdelenia náhodnej premennej ξ

Tak ako v prípade diskrétneho rozdelenia je rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ dané hodnotami, ktoré nadobúda a pravdepodobnosťami, s akými tieto nadobúda, tak v prípade spojitého rozdelenia je náhodná premenná daná kladnou reálnou funkciou $f(x)$ tzv. hustotou rozdelenia.

Definícia (Hustota spojitého rozdelenia náhodnej premennej)

Hovoríme že náhodná premenná ξ má spojité rozdelenie, ak existuje taká nezáporná funkcia $f(x)$, pre ktorú platí

$$F(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

kde $F(x)$ predstavuje distribučnú funkciu prislúchajúcu náhodnej premennej ξ. Funkciu $f(x)$ nazývame hustota rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ.

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia

Podľa definície distribučnej funkcie platí

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

odkiaľ priamo vyplýva vzťah pre výpočet pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá má spojité rozdelenie

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia

Podľa definície distribučnej funkcie platí

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

odkiaľ priamo vyplýva vzťah pre výpočet pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá má spojité rozdelenie

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Aby funkcia $f(x)$ bola hustotou rozdelenia spojitej premennej, musí pre ňu platiť

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia $f(x)$

Príklad (3.a))

Určime konštantu c tak, aby funkcia $f(x)$ bola hustotou rozdelenia náhodnej premennej ξ, následne vypočítajme pravdepodobnosť, že náhodná premenná ξ bude nadobúdať hodnoty z intervalu $[-1, 1]$, t. j. vypočítajme $P(-1 \leq \xi \leq 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia $f(x)$

Príklad (3.a))

Určime konštantu c tak, aby funkcia $f(x)$ bola hustotou rozdelenia náhodnej premennej ξ, následne vypočítajme pravdepodobnosť, že náhodná premenná ξ bude nadobúdať hodnoty z intervalu $[-1,1]$, t. j. vypočítajme $P(-1 \leq \xi \leq 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Musí platiť

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia $f(x)$

Príklad (3.b))

Teda

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} cx^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = c\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = \Bigg/ \begin{array}{c} t = x^3 \\ \mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x \\ 0 \to 0 \\ \infty \to \infty \end{array} \Bigg/$$

$$= \frac{c}{3}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{c}{3}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{3}\left(0 + \mathrm{e}^{0}\right) = \frac{c}{3},$$

Príklad (3.b))

Teda

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} cx^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = c\int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = \left/ \begin{array}{c} t = x^3 \\ \mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x \\ 0 \to 0 \\ \infty \to \infty \end{array} \right/$$

$$= \frac{c}{3}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{c}{3}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{3}\left(0+\mathrm{e}^{0}\right) = \frac{c}{3},$$

a preto

$$\frac{c}{3} = 1,$$

odkiaľ pre hľadanú konštantu platí

$$c = 3.$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia $f(x)$

Príklad (3.c))

Hustota rozdelenia bude mať teda tvar

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Základné vlastnosti hustoty rozdelenia $f(x)$

Príklad (3.c))

Hustota rozdelenia bude mať teda tvar

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Pravdepodobnosť $P(-1 \leq \xi \leq 1)$ *vypočítame nasledujúcim spôsobom*

$$\begin{aligned} P(-1 \quad &\leq \quad \xi \leq 1) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0 + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \quad \int_{0}^{1} 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{0} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 \doteq 0.632 = 63.2\%. \end{aligned}$$

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **stredná hodnota** $E(\xi) = \mu$

Stredná hodnota náhodnej premennej je akousi „charakteristikou polohy”, okolo ktorého sú sústredené hodnoty náhodnej premennej ξ. Označujeme ju $E(\xi)$ alebo μ.

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **stredná hodnota** $E(\xi) = \mu$

Stredná hodnota náhodnej premennej je akousi „charakteristikou polohy", okolo ktorého sú sústredené hodnoty náhodnej premennej ξ. Označujeme ju $E(\xi)$ alebo μ.

Definícia (Stredná hodnota $E(\xi)$ náhodnej premennej ξ)

Stredná hodnota *je pre:*

1. *diskrétnu náhodnú premennú ξ a jej pravdepodobnostnú funkciu $p_i = P(\xi = x_i)$ definovaná ako*

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i,$$

kde $p_i = P(\xi = x_i)$,

2. *spojitú náhodnú premennú ξ a jej hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ definovaná ako*

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x.$$

Príklad (4.)

Náhodná premenná má dané svoje diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti tabuľkou

$\xi = x_i$:	-1	0	1	2	3
$p_i = P(\xi = x_i)$:	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Určíme strednú hodnotu $E(\xi)$ tohto rozdelenia pravdepodobnosti.

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **stredná hodnota** $E(\xi) = \mu$

Príklad (4.)

Náhodná premenná má dané svoje diskrétne rozdelenie pravdepodobnosti tabuľkou

$\xi = x_i :$	-1	0	1	2	3
$p_i = P(\xi = x_i) :$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

.

Určíme strednú hodnotu $E(\xi)$ tohto rozdelenia pravdepodobnosti.

Dosadením do vzťahu pre výpočet strednej hodnoty diskrétnej náhodnej premennej dostávame

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 = 1.2.$$

Príklad (5.)

Hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ *je*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

Určíme strednú hodnotu $E(\xi)$.

Príklad (5.)

Hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ *je*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

Určime strednú hodnotu $E(\xi)$.

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \Bigg/ \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \Bigg/ \\ &= \frac{1}{2} \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \left(\pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[\sin x \right]_0^{\pi}}_{=0} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **rozptyl** $D(\xi) = \sigma^2$

Vyjadrením miery variability náhodnej premennej ξ je **rozptyl**[2] **(disperzia)**, ktoré budeme označovať $D(\xi)$ alebo σ^2.

[2] Rozptyl je stredná hodnota kvadrátov odchýlok od strednej hodnoty $D(\xi) = E\left((\xi - E(\xi))^2\right)$.

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - rozptyl $D(\xi) = \sigma^2$

Vyjadrením miery variability náhodnej premennej ξ je **rozptyl**[2] **(disperzia)**, ktoré budeme označovať $D(\xi)$ alebo σ^2.

Definícia (Rozptyl - disperzia)

1. *pre diskrétnu náhodnú premennú ξ je definovaný ako*

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(\xi))^2 \cdot p_i,$$

kde $p_i = P(\xi = x_i)$,

2. *pre spojitú náhodnú premennú ξ je definovaný ako*

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x.$$

[2] Rozptyl je stredná hodnota kvadrátov odchýlok od strednej hodnoty $D(\xi) = E\left((\xi - E(\xi))^2\right)$.

Poznámka (Vlastnosti rozptylu $D(\xi) = \sigma^2$)

i) $D(C) = 0,$ *kde C je konštanta,*

ii) $D(a \cdot \xi + b) = a^2 \cdot D(\xi),$ *kde a, b sú konštanty,*

iii) *nech sú náhodné veličiny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ nezávislé, potom platí*

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) &= D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n), \\ D(\xi_1 - \xi_2 - \ldots - \xi_n) &= D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n). \end{aligned}$$

Vlastnosti **rozptylu** $D(\xi) = \sigma^2$ a **smerodajná odchýlka** σ

Poznámka (Vlastnosti rozptylu $D(\xi) = \sigma^2$)

i) $D(C) = 0$, *kde* C *je konštanta,*

ii) $D(a \cdot \xi + b) = a^2 \cdot D(\xi)$, *kde* a, b *sú konštanty,*

iii) nech sú náhodné veličiny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *nezávislé, potom platí*

$$\begin{aligned} D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) &= D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n), \\ D(\xi_1 - \xi_2 - \ldots - \xi_n) &= D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n). \end{aligned}$$

Definícia (Smerodajná odchýlka σ)

Ďalšou charakteristikou variability je smerodajná odchýlka σ*, ktorá je definovaná pomocou rozptylu*

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} \qquad \text{alebo} \qquad \sigma^2 = D(\xi).$$

Príklad (6.)

Určime rozptyl $D(\xi)$ a smerodajnú odchýlku σ diskrétnej náhodnej premennej danej tabuľkou

$\xi = x_i$:	-1	0	1	2	3
$p_i = P(\xi = x_i)$:	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

.

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **rozptyl** $D(\xi) = \sigma^2$

Príklad (6.)

Určíme rozptyl $D(\xi)$ a smerodajnú odchýlku σ diskrétnej náhodnej premennej danej tabuľkou

$\xi = x_i$:	-1	0	1	2	3
$p_i = P(\xi = x_i)$:	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

.

Rozptyl je podľa vzťahu

$$\begin{aligned} D(\xi) &= (-1-1.2)^2 \cdot 0.1 + (0-1.2)^2 \cdot 0.2 + (1-1.2)^2 \cdot 1.2 \\ &\quad + (2-1.2)^2 \cdot 0.4 + (3-1.2)^2 \cdot 0.1 \\ &= 1.4, \end{aligned}$$

Príklad (6.)

Určime rozptyl $D(\xi)$ *a smerodajnú odchýlku* σ *diskrétnej náhodnej premennej danej tabuľkou*

$\xi = x_i$:	-1	0	1	2	3
$p_i = P(\xi = x_i)$:	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Rozptyl je podľa vzťahu

$$\begin{aligned} D(\xi) &= (-1-1.2)^2 \cdot 0.1 + (0-1.2)^2 \cdot 0.2 + (1-1.2)^2 \cdot 1.2 \\ &\quad + (2-1.2)^2 \cdot 0.4 + (3-1.2)^2 \cdot 0.1 \\ &= 1.4, \end{aligned}$$

odkiaľ pre smerodajnú odchýlku dostávame

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1.4} \doteq 1.18.$$

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **rozptyl** $D(\xi) = \sigma^2$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$*, ak* $E(\xi) = a$*, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej* ξ *danú*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x) \mathrm{d}x$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$D(\xi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x \mathrm{d}x$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x \mathrm{d}x = \Bigg/ \begin{array}{cc} u = (x-a)^2 & u' = 2(x-a) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \Bigg/$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x \mathrm{d}x = \Bigg/ \begin{matrix} u = (x-a)^2 & u' = 2(x-a) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \Bigg/ \\ &= -\Big[(x-a)^2 \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x-a)\cos x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Číselné charakteristiky náhodnej premennej - **rozptyl** $D(\xi) = \sigma^2$

Príklad (7.)

Určíme rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x\mathrm{d}x = \Bigg/ \begin{matrix} u = (x-a)^2 & u' = 2(x-a) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \Bigg/ \\ &= -\left[(x-a)^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x-a)\cos x\mathrm{d}x = a^2 + \Bigg/ \begin{matrix} u = 2(x-a) & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \Bigg/ \end{aligned}$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x \mathrm{d}x = \left/ \begin{matrix} u = (x-a)^2 & u' = 2(x-a) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right/ \\ &= -\left[(x-a)^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x-a)\cos x \mathrm{d}x = a^2 + \left/ \begin{matrix} u = 2(x-a) & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right/ \\ &= a^2 + 2\left[(x-a)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Príklad (7.)

Určime rozptyl $D(\xi)$, ak $E(\xi) = a$, pre hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ danú

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \textit{všade inde.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \sin x \mathrm{d}x = \Bigg/ \begin{matrix} u = (x-a)^2 & u' = 2(x-a) \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \Bigg/ \\ &= -\Big[(x-a)^2 \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x-a) \cos x \mathrm{d}x = a^2 + \Bigg/ \begin{matrix} u = 2(x-a) & u' = 2 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \Bigg/ \\ &= a^2 + 2\left[(x-a)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = a^2 + 2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - 2 = a^2 + \pi - 2a - 2. \end{aligned}$$

Diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti - **Binomické rozdelenie**

Pri n-násobnom opakovaní náhodného pokusu sledujeme, koľkokrát nastal jav A ($P(A) = p$), poprípade koľkokrát nenastal ($P(\overline{A}) = 1 - p$) je určené **binomickým rozdelením** pravdepodobnosti

parametre:	n, p
pravdepodobnostná funkcia:	$P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = np$
rozptyl:	$D(\xi) = np(1-p)$

Pri n-násobnom opakovaní náhodného pokusu sledujeme, koľkokrát nastal jav A $(P(A) = p)$, poprípade koľkokrát nenastal $(P(\overline{A}) = 1 - p)$ je určené **binomickým rozdelením** pravdepodobnosti

parametre:	n, p
pravdepodobnostná funkcia:	$P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = np$
rozptyl:	$D(\xi) = np(1 - p)$

Príklad (8.A)

Výrobný podnik vyexpedoval zásielku, ktorá mala 20 *výrobkov. Pravdepodobnosť, že sa výrobok poškodí je* 0.1. *Vypočítajme*

a) *pravdepodobnosť, že sa poškodia počas prepravy práve* 4 *výrobky,*

b) *strednú hodnotu a rozptyl počtu poškodených výrobkov počas prepravy.*

Príklad (8.B)

Parametre rozdelenia sú $n = 20, p = 0.1$.

a) *pravdepodobnosť, že sa poškodia počas prepravy práve* 4 *výrobky je*

$$P(\xi = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^{16} \doteq 0.09 = 9\%,$$

Príklad (8.B)

Parametre rozdelenia sú $n = 20, p = 0.1$.

a) *pravdepodobnosť, že sa poškodia počas prepravy práve 4 výrobky je*

$$P(\xi = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^{16} \doteq 0.09 = 9\%,$$

b) *strednú hodnotu a rozptyl počtu poškodených výrobkov počas prepravy je*

$$\begin{aligned} E(\xi) &= np = 20 \cdot 0.1 = 2, \\ D(\xi) &= np(1-p) = 20 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 1.8. \end{aligned}$$

Ak pravdepodobnosť výskytu javu v jednom pokuse je veľmi malá $p \to 0$ (obvykle $p \leq 0.1$) a zároveň počet pokusov je veľký $n \to \infty$ (zväčša pre $n \geq 30$) použijeme namiesto binomického rozdelenia **Poissonovo rozdelenie**. Parametre n a p nahrádzame parametrom λ, pre ktorý platí $\lambda = np$.

Poissonovo rozdelenie sa používa v teórii hromadnej obsluhy (náhodný jav predstavujúci príchod zákazníka, volajúci do telefónnej ústredne, etc.).

parameter:	$\lambda = np$
pravdepodobnostná funkcia:	$P(\xi = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \lambda$
rozptyl:	$D(\xi) = \lambda$

Príklad (9.A)

Na málo frekventovanú telefónnu ústredňu prichádza za hodinu v priemere 7 výziev, t. j. stredná hodnota počtu výziev je 7 za hodinu.
Určme pravdepodobnosť, že v priebehu 5 minút prídu

a) *práve 4 výzvy,*

b) *aspoň 2 výzvy.*

Príklad (9.B)

Náhodná premenná ξ *predstavujúca počet výziev za 5 minút bude mať strednú hodnotu* $E(\xi) = 7/12 = \lambda$ *a pravdepodobnosť, že*

Príklad (9.B)

Náhodná premenná ξ predstavujúca počet výziev za 5 minút bude mať strednú hodnotu $E(\xi) = 7/12 = \lambda$ a pravdepodobnosť, že

a) *práve 4 výzvy v priebehu 5 minút je*

$$P(\xi = 4) = \frac{\lambda^4}{4!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^4}{4!}\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} = \frac{2401}{497\,664} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} \doteq 0.0027 = 0.27\%,$$

Príklad (9.B)

Náhodná premenná ξ predstavujúca počet výziev za 5 minút bude mať strednú hodnotu $E(\xi) = 7/12 = \lambda$ a pravdepodobnosť, že

a) *práve 4 výzvy v priebehu 5 minút je*

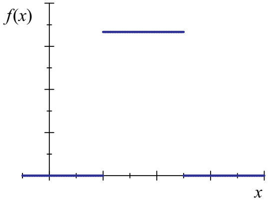
$$P(\xi = 4) = \frac{\lambda^4}{4!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^4}{4!}\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} = \frac{2401}{497\,664} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} \doteq 0.0027 = 0.27\%,$$

b) *aspoň 2 výzvy v priebehu 5 minút je*

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 2) &= 1 - P(\xi < 2) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1)) \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} - \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} = 1 - \frac{19}{12} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{7}{12}} \doteq 0.116 = 11.6\%. \end{aligned}$$

Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti majú náhodné veličiny, ktoré majú rovnakú možnosť nadobúdať ktorúkoľvek hodnotu z nejakého intervalu konečnej dĺžky (a, b) (hustota pravdepodobnosti je konštantná na celom intervale).

parametre:	a, b
hustota rozdelenia:	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \notin (a,b) \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{pre } x \in (a,b) \end{cases}$
distribučná funkcia:	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pre } a < x < b \\ 1, & \text{pre } x \geq b \end{cases}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \dfrac{a+b}{2}$
rozptyl:	$D(\xi) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$



Príklad (9.A)

Pri telefonovaní uplynie medzi vytočením poslednej číslice volaného čísla a spojením hovoru určitá doba, ktorú môžeme považovať, za náhodnú premennú s rovnomerným rozdelením na intervale $[3, 53]$ *sekúnd.*
Vypočítajme pravdepodobnosť, že

a) *na spojenie budeme čakať aspoň* 20 *sekúnd,*

b) *na spojenie budeme čakať v intervale* $[10, 30]$ *sekúnd,*

c) *vypočítajme strednú dobu čakania.*

Príklad (9.B)

a) *budeme čakať aspoň 20 sekúnd,*

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 20) &= P\left(20 \leq \xi < \infty\right) = F(53) - F(20) \\ &= \frac{53-3}{53-3} - \frac{20-3}{53-3} = \frac{33}{50} = 0.66 = 66\%, \end{aligned}$$

b) *budeme čakať budeme čakať od 10 do 30 sekúnd,*

$$P\left(10 \leq \xi \leq 30\right) = F(30) - F(10) = \frac{30-3}{53-3} - \frac{10-3}{53-3} = \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%,$$

c) *stredná doba čakania*

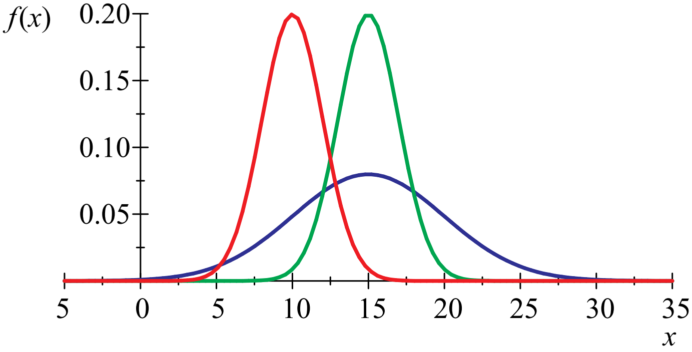
$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} = \frac{3+53}{2} = 28.$$

Spojité rozdelenia pravdepodobnosti - **Normálne rozdelenie** $N(\mu, \sigma^2)$

Normálne (Laplace-Gaussovo) rozdelenie používame všade tam, kde kolísanie náhodnej veličiny je spôsobené súčtom veľkého počtu malých a navzájom nezávislých vplyvov.

parametre:	μ, σ^2
hustota rozdelenia:	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad$ pre $x \in (-\infty, \infty)$
distribučná funkcia:	$F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t, \quad$ pre $t \in (-\infty, \infty)$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \mu$
rozptyl:	$D(\xi) = \sigma^2$

Skutočnosť, že náhodná veličina ξ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou μ a smerodajnou odchýlkou $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\sigma^2}$ zapisujeme $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.



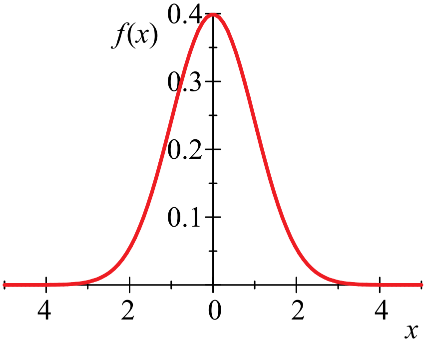
Obr.: Hustota normálneho rozdelenia $N(10, 2)$, $N(15, 2)$ a $N(15, 5)$.

Spojité rozdelenia pravdepodobnosti - **Normálne normované rozdelenie**

V prípade, že parametre μ a σ normálneho rozdelenia sú rovné $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, hovoríme, že náhodná premenná ξ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti v normovanom tvare, t. j. má **normované normálne rozdelenie** pravdepodobnosti. Skutočnosť, že náhodná premenná má normované normálne rozdelenie zapisujeme nasledovne $\xi \sim N(0, 1)$.
Pre normálne normované rozdelenie platí:

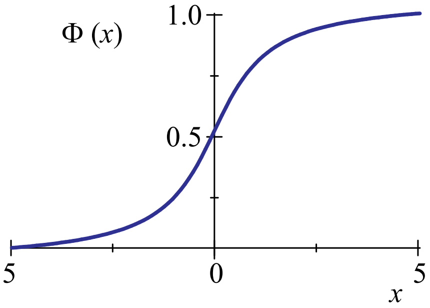
parametre:	$\mu = 0, \sigma^2 = 1$
hustota rozdelenia:	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}, \quad$ pre $x \in (-\infty, \infty)$
distribučná funkcia:	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t, \quad$ pre $t \in (-\infty, \infty)$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \mu = 0$
rozptyl:	$D(\xi) = \sigma^2 = 1$

Spojité rozdelenia pravdepodobnosti - **Normálne normované rozdelenie**



Obr.: Hustota normálneho normovaného rozdelenia $N(0,1)$.

Spojité rozdelenia pravdepodobnosti - **Normálne normované rozdelenie**



Obr.: Distribučná funkcia $\Phi(x)$ normálneho normovaného rozdelenia $N(0,1)$.

Vzťah medzi normálnym $N(\mu, \sigma^2)$ a normálnym normovaným $N(0, 1)$ rozdelením

Keďže sú tabelované iba hodnoty normálneho normovaného rozdelenia pri normálnom rozdelení musíme na zistenie hodnoty kvantilov použiť určitý prepočet, ktorý si teraz odvodíme

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t = \Bigg/ \begin{array}{l} u = \dfrac{t-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{d}t \end{array} \quad \begin{array}{c||cc} t & -\infty & x \\ \hline u & -\infty & \dfrac{x-\mu}{\sigma} \end{array} \Bigg/$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\boxed{\frac{x-\mu}{\sigma}}} \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2}} \mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Vzťah medzi normálnym $N(\mu, \sigma^2)$ a normálnym normovaným $N(0, 1)$ rozdelením náhodnej premennej ξ

Veta (Prevod z $N(\mu, \sigma^2)$ na $N(0, 1)$)

Pre prevod hodnoty akejkoľvek hodnoty distribučnej funkcie $F(x)$ ľubovoľného normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ na hodnotu distribučnej funkcie $\Phi(x)$ normálneho normovaného rozdelenia $N(0, 1)$ budeme používať vzťah

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Príklad (10.)

Náhodná premenná ξ má rozdelenie $N(0,1)$. Určime :

a) $P(2 \leq \xi \leq 10)$,

b) $P(\xi \geq 0)$.

a) *Priamo z definície distribučnej funkcie $\Phi(x)$ dostávame*

$$\begin{aligned} P(2 \leq \xi \leq 10) &= \Phi(10) - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023 \\ &= 2.3\%, \end{aligned}$$

b) *a podobne platí*

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 0) &= P(0 \leq \xi < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(0) \\ &= 1 - 0.5 = 0.5 = 50\%. \end{aligned}$$

Vzťah medzi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0,1)$

Príklad (11.)

Náhodná premenná ξ *má rozdelenie* $N(0.8, 4)$. *Určíme:*

a) $P(\xi \geq 1)$,

b) $P(\xi \leq -1.16)$.

a) *Platí* $P(\xi \geq 1) = P(1 \leq \xi < \infty)$ *preto*

$$P(\xi \geq 1) = F(\infty) - F(1) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{1-0.8}{2}\right) = 1 - \Phi(0.1) = 1 - 0.54 = 46$$

b) *podobne* $P(\xi \leq -1.16) = P(-\infty < \xi \leq -1.16)$ *preto*

$$\begin{aligned} P(\xi \leq -1.16) &= F(-1.16) - F(-\infty) = \Phi\left(\frac{-1.16-0.8}{2}\right) - \Phi(-\infty) \\ &= \Phi(-0.98) - 0 = 1 - 0.836 = 0.164 = 16.4\%. \end{aligned}$$

Vzťah medzi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0, 1)$

Príklad (12.A)

Hrúbku vyrábaných platní môžeme považovať za náhodnú premennú ξ.
Predpokladajme, že ξ *má normálne rozdelenie so strednou hodnotou* $E(\xi) = 10$ mm
a smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0.02$ mm.
Určime aké percento môžeme očakávať, ak predpokladáme, že chybné sú

a) *platne tenšie* 9.97 mm

b) *platne hrubšie* 10.024 mm

Vzťah medzi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0,1)$

Príklad (12.B)

a) *platne tenšie* 9.97 mm

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 9.97) &= P(-\infty < \xi \leq 9.97) = F(9.97) - F(-\infty) \\ &= \Phi\left(\frac{9.97-10}{0.02}\right) - 0 = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \\ &= 1 - 0.933 = 0.067 = 6.7\%, \end{aligned}$$

b) *platne hrubšie* 10.024 mm

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 10.024) &= P(10.024 \leq \xi < \infty) \\ &= F(\infty) - F(10.024) = 1 - \Phi\left(\frac{10.024-10}{0.02}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.885 = 0.115 = 11.5\%. \end{aligned}$$

Vzťah medzi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0, 1)$

Príklad (13.A)

O miere inteligencie IQ vieme, že má normálne rozdelenie so strednou hodnotou IQ 90 *a smerodajnou odchýlkou* ± 15 *bodov.*
Vypočítajme pravdepodobnosť, že

a) *náhodný okoloidúci je debil, t. j. miera IQ je u neho menšia alebo nanajvýš rovná* 60 *bodov,*

b) *náhodný spolusediaci má dostatok IQ na to, aby dokázal zvládnuť tento kurz, t. j. miera IQ je u neho väčšia ako* 80 *bodov.*

Vzťah medzi $N(\mu, \sigma^2)$ a $N(0, 1)$

Príklad (13.B)

a) je debil

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 60) &= P(-\infty < \xi \leq 60) = F(60) - F(-\infty) \\ &= \Phi\left(\frac{60-90}{15}\right) - 0 = \Phi(-2) = 1 - 0.977 \\ &= 0.023 = 2.3\%, \end{aligned}$$

b) temer nie je debil

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 80) &= P(80 \leq \xi < \infty) = F(\infty) - F(80) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{80-90}{15}\right) = 1 - \Phi\left(-0.6\overline{6}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \Phi\left(0.6\overline{6}\right)\right) = 0.749 = 74.9\%. \end{aligned}$$

Zhrnutie I.

Nech náhodná premenná ξ je definovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, α, P).
Potom reálnu funkciu

$$F(x) = P(\xi < x), \qquad \text{pre } x \in (-\infty, \infty),$$

nazývame distribučná funkcia diskrétnej náhodnej premennej.
Hovoríme že náhodná premenná ξ má spojité rozdelenie, ak existuje taká nezáporná funkcia $f(x)$, pre ktorú platí

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde $F(x)$ predstavuje distribučnú funkciu prislúchajúcu náhodnej premennej ξ.
Funkciu $f(x)$ nazývame hustota rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ.

Zhrnutie II.

Stredná hodnota je pre:

1. diskrétnu náhodnú premennú ξ a jej pravdepodobnostnú funkciu $p_i = P(\xi = x_i)$ definovaná ako
$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(\xi = x_i),$$
2. spojitú náhodnú premennú ξ a jej hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ definovaná ako
$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x.$$

Zhrnutie III.

Rozptyl (disperzia) je daný

1. pre diskrétnu náhodnú premennú ξ je definovaný ako

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(\xi))^2 \cdot P(\xi = x_i),$$

2. pre spojitú náhodnú premennú ξ je definovaný ako

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 \cdot f(x) \mathrm{d}x.$$