ŽILINSKÁ UNIVERZITA
V ŽILINE

Definícia pravdepodobnosti

Pavol ORŠANSKÝ

12. októbra 2023

Náhodný jav

Definícia (Náhodný pokus - dej)

Náhodný pokus (dej) je dej, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje.

Máme tým na mysli pokusy, ktorých výsledok vopred nemožno určiť.

Náhodný jav

Definícia (Náhodný pokus - dej)

Náhodný pokus (dej) je dej, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje.

Máme tým na mysli pokusy, ktorých výsledok vopred nemožno určiť.
napr.: hod mincou, počet obetí zemetrasenia v Číne.

Náhodný jav

Definícia (Náhodný pokus - dej)

Náhodný pokus (dej) je dej, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje.

Máme tým na mysli pokusy, ktorých výsledok vopred nemožno určiť.
napr.: hod mincou, počet obetí zemetrasenia v Číne.

Definícia (Náhodný jav)

Náhodný jav je pravdivé tvrdenie o výsledku náhodného pokusu.

Náhodný jav

Definícia (Náhodný pokus - dej)

Náhodný pokus (dej) je dej, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje.

Máme tým na mysli pokusy, ktorých výsledok vopred nemožno určiť.
napr.: hod mincou, počet obetí zemetrasenia v Číne.

Definícia (Náhodný jav)

Náhodný jav je pravdivé tvrdenie o výsledku náhodného pokusu.

napr.: „Pri hode mincou padne symbol znak.“, „Pri zemetrasení v Číne zomrie 3624 osôb.“

Náhodný jav

Definícia (Náhodný pokus - dej)

Náhodný pokus (dej) je dej, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje.

Máme tým na mysli pokusy, ktorých výsledok vopred nemožno určiť.
napr.: hod mincou, počet obetí zemetrasenia v Číne.

Definícia (Náhodný jav)

Náhodný jav je pravdivé tvrdenie o výsledku náhodného pokusu.

napr.: „Pri hode mincou padne symbol znak.“, „Pri zemetrasení v Číne zomrie 3624 osôb.“

Poznámka

Náhodný jav budeme označovať veľkými tlačenými písmenami:

ozn.: A... „Pri hode hracou kockou padne číslo tri.“

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Relácia rovnosti, ozn.: $A = B$

Ak jav A je súčasťou javu B a zároveň jav B je súčasťou javu A.

napr.: A :... „Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

B :... „Pri hode kockou padne párne číslo deliteľné tromi."

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Relácia rovnosti, ozn.: $A = B$

Ak jav A je súčasťou javu B a zároveň jav B je súčasťou javu A.

napr.: A :... „Pri hode hracou kockou padne číslo šesť.“

B :... „Pri hode kockou padne párne číslo deliteľné tromi.“

Operácia zjednotenia, ozn.: $A \cup B$

Je náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A alebo jav B, t. j. nastane aspoň jeden z javov A alebo B.

napr.: A :... „Pri hode kockou padne číslo šesť.“ B :... „Pri hode kockou padne číslo päť.“

$A \cup B$:... „Pri hode kockou padne číslo päť alebo číslo šesť.“

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Relácia rovnosti, ozn.: $A = B$

Ak jav A je súčasťou javu B a zároveň jav B je súčasťou javu A.

napr.: A :... „Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

B :... „Pri hode kockou padne párne číslo deliteľné tromi."

Operácia zjednotenia, ozn.: $A \cup B$

Je náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A alebo jav B, t. j. nastane aspoň jeden z javov A alebo B.

napr.: A :... „Pri hode kockou padne číslo šesť." B :... „Pri hode kockou padne číslo päť."

$A \cup B$:... „Pri hode kockou padne číslo päť alebo číslo šesť."

Operácia prieniku, ozn.: $A \cap B$

Je náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A a súčasne nastane jav B, t. j. nastanú súčasne oba javy.

napr.: A :... „Pri hode kockou padne číslo šesť." B :... „Pri hode kockou padne číslo päť."

$A \cap B$:... „Pri hode kockou padne číslo päť a súčasne číslo šesť."

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Opačný jav, ozn.: $\bar{A}$

Opačný náhodný jav ku náhodnému javu A nastane vtedy, ak nenastane jav A.

napr.: A:... „Pri hode kockou padne číslo šesť."

$\bar{A}$:... „Pri hode kockou nepadne číslo šesť, t. j. padne jedno z čísel jedna až päť."

Opačný jav, ozn.: $\bar{A}$

Opačný náhodný jav ku náhodnému javu A nastane vtedy, ak nenastane jav A.

napr.: A:... „Pri hode kockou padne číslo šesť."

$\bar{A}$:... „Pri hode kockou nepadne číslo šesť, t. j. padne jedno z čísel jedna až päť."

Istý jav, ozn.: Ω

Istý jav je náhodný jav, ktorý nastane vždy.

Ω :... „Pri hode kockou padne jedno z čísel jedna, dva, tri, štyri, päť alebo šesť."

$$A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Opačný jav, ozn.: $\bar{A}$

Opačný náhodný jav ku náhodnému javu A nastane vtedy, ak nenastane jav A.

napr.: A:... „Pri hode kockou padne číslo šesť."

$\bar{A}$:... „Pri hode kockou nepadne číslo šesť, t. j. padne jedno z čísel jedna až päť."

Istý jav, ozn.: Ω

Istý jav je náhodný jav, ktorý nastane vždy.

Ω :... „Pri hode kockou padne jedno z čísel jedna, dva, tri, štyri, päť alebo šesť."

$$A \cup \bar{A} = \Omega.$$

Nemožný jav , ozn.: $\varnothing$

Nemožný jav je náhodný jav, ktorý nenastane nikdy.

napr.: $\varnothing$:... „Pri hode kockou, kocka sublimuje."

$$\overline{\Omega} = \varnothing.$$

Poznámka (Disjunktné/nezlučiteľné náhodné javy)

Ak náhodné javy $A \cap B = \emptyset$*, t. j. ak tieto dva javy nikdy nenastanú súčasne, potom takéto javy nazývame navzájom disjunktné (nezlučiteľné) náhodné javy.*

napr.: súčasné padnutie čísiel dva a tri pri hode jednou kockou.

Algebraické operácie a relácie s náhodnými javmi

Poznámka (Disjunktné/nezlučiteľné náhodné javy)

Ak náhodné javy $A \cap B = \emptyset$*, t. j. ak tieto dva javy nikdy nenastanú súčasne, potom takéto javy nazývame navzájom disjunktné (nezlučiteľné) náhodné javy.*

napr.: súčasné padnutie čísiel dva a tri pri hode jednou kockou.

Poznámka

Javy môžeme aj porovnávať, ak $A \subset B$*, potom hovoríme, že jav* A *je podjavom javu* B*.*

napr.: A... „Pri hode kockou padne číslo šesť."
B...„Pri hode kockou padne párne číslo."

Klasická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť by mala mať podobné vlastnosti ako relatívna početnosť, nakoľko ju má modelovať.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{počet priaznivých výsledkov}}{\text{počet všetkých možných výsledkov}}$$

Klasická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť by mala mať podobné vlastnosti ako relatívna početnosť, nakoľko ju má modelovať.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{počet priaznivých výsledkov}}{\text{počet všetkých možných výsledkov}}$$

Jav, ktorý nie je možné ďalej rozložiť na podrobnejšie, nazývame elementárny (nedeliteľný) jav.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť by mala mať podobné vlastnosti ako relatívna početnosť, nakoľko ju má modelovať.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{počet priaznivých výsledkov}}{\text{počet všetkých možných výsledkov}}$$

Jav, ktorý nie je možné ďalej rozložiť na podrobnejšie, nazývame elementárny (nedeliteľný) jav.

Definícia (Algebra množín)

Systém množín α nazývame algebrou, ak platí:

1. $\forall A, B \in \alpha$ *platí, že aj* $A \cup B \in \alpha$,
2. $\forall A, B \in \alpha$ *platí, že aj* $A \cap B \in \alpha$,
3. $\forall A \in \alpha$ *platí, že aj* $\overline{A} \in \alpha$
4. $\Omega \in \alpha$,
5. $\varnothing \in \alpha$.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Definícia (Pravdepodovnosť ako reálna funkcia definovaná na algebre množín)

Reálnu funkciu $P(A)$ definovanú na algebre α podmnožín množiny Ω budeme nazývať pravdepodobnosťou, ak bude platiť nasledovné:

1. $\forall A \in \alpha \Rightarrow P(A) \geq 0$,
2. $\forall A, B \in \alpha$, *také, že platí* $A \cap B = \emptyset$ *(t. j. disjunktné)*
   $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
3. $P(\Omega) = 1$,
4. $P(\emptyset) = 0$.

Klasická definícia pravdepodobnosti

Definícia (Pravdepodovnosť ako reálna funkcia definovaná na algebre množín)

Reálnu funkciu $P(A)$ definovanú na algebre α podmnožín množiny Ω budeme nazývať pravdepodobnosťou, ak bude platiť nasledovné:

1. $\forall A \in \alpha \Rightarrow P(A) \geq 0$,
2. $\forall A, B \in \alpha$, *také, že platí* $A \cap B = \varnothing$ *(t. j. disjunktné)*
   $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
3. $P(\Omega) = 1$,
4. $P(\varnothing) = 0$.

Poznámka

Ak predpokladáme, že množina elementárnych javov Ω je konečná, a zároveň každý elementárny jav má navyše rovnakú pravdepodobnosť, dostávame špeciálny prípad, tzv. klasickú definíciu pravdepodobnosti.

Kolmogorova definícia pravdepodobnosti

Základnou myšlienkou je, že množina elementárnych javov Ω je nekonečná a tiež, že jednotlivé elementárne javy nemajú rovnakú pravdepodobnosť. V dôsledku toho je potrebné vykonať limitné úvahy o nekonečnej postupnosti náhodných javov. Vzhľadom na tieto skutočnosti rozšírime definíciu algebry na tzv. σ-algebru.

Kolmogorova definícia pravdepodobnosti

Základnou myšlienkou je, že množina elementárnych javov Ω je nekonečná a tiež, že jednotlivé elementárne javy nemajú rovnakú pravdepodobnosť. V dôsledku toho je potrebné vykonať limitné úvahy o nekonečnej postupnosti náhodných javov. Vzhľadom na tieto skutočnosti rozšírime definíciu algebry na tzv. σ-algebru.

Definícia (σ-algebra)

Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina a α nech je neprázdny systém podmnožín množiny Ω.
Potom systém α nazveme σ-algebrou, ak platí:

1. $\forall A \in \alpha \Rightarrow \overline{A} \in \alpha.$
2. $\forall A_i \in \alpha$, *kde* $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \alpha.$

Kolmogorova definícia pravdepodobnosti

Definícia (Kolmogorova definícia pravdepodobnosti)

Nech Ω je neprázdna množina a α nech je σ-algebra náhodných javov (podmnožín množiny Ω) definovaných na množine Ω.
Potom pravdepodobnosťou $P(A)$ javu $A \in \alpha$ je reálna funkcia definovaná na α, ktorá pre všetky disjunktné javy spĺňa nasledujúce:

1. $P(\Omega) = 1.$
2. $P(A) \geq 0, \qquad \forall A_j \in \alpha,\ j = 1, 2, \ldots,$
3. $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$

Kolmogorova definícia pravdepodobnosti

Definícia (Kolmogorova definícia pravdepodobnosti)

Nech Ω je neprázdna množina a α nech je σ-algebra náhodných javov (podmnožín množiny Ω) definovaných na množine Ω.
Potom pravdepodobnosťou $P(A)$ javu $A \in \alpha$ je reálna funkcia definovaná na α, ktorá pre všetky disjunktné javy spĺňa nasledujúce:

1. $P(\Omega) = 1.$
2. $P(A) \geq 0, \qquad \forall A_j \in \alpha,\ j = 1, 2, \ldots,$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$

Vlastnosti pravdepodobnosti:

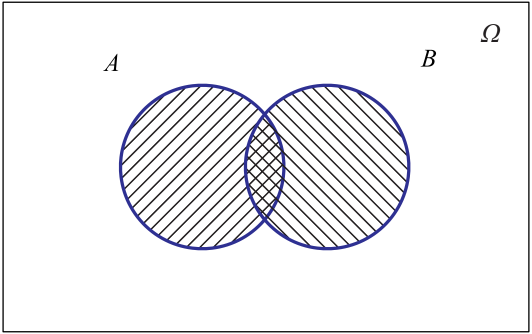
$$0 \leq P(A) \leq 1,$$
$$P(\emptyset) = 0.$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch náhodných javov)

Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch náhodných javov je daná vzťahom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

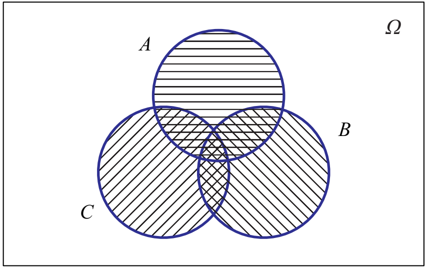


Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia troch náhodných javov)

Pravdepodobnosť zjednotenia troch náhodných javov je daná vzťahom

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) \quad = \quad & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
& + P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}
$$



Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia n náhodných javov)

Pre n náhodných javov je pravdepodobnosť ich zjednotenia

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}^{n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n}^{n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
&\ldots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) .
\end{aligned}
$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Dôsledok (Tretia axióma Kolmogorovej definície pravdepodobnosti)

Vzťah pre zjednotenie disjunktných javov ($A_i \cap A_j = \varnothing$)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Príklad (1. a)

V už nepoužívanom hokejovom štadióne metropoly východu bolo možné rozmiestniť maximálne tri televízne kamery, v prípade priameho televízneho prenosu z hokejového stretnutia. Tieto snímali nezávisle od seba. Pre prvú (centrálnu) kameru je pravdepodobnosť, že bude snímať v danom okamihu 60%, pre druhú a tretiu (pokrývajúce tretinu domácich resp. hostí) je táto pravdepodobnosť rovnaká a rovná 80%.
Vypočítajme pravdepodobnosť, že bude snímať v danom okamihu dianie na ľadovej ploche aspoň jedna z kamier!

Riešenie: $A : \ldots$ „Bude snímať aspoň jedna z kamier."

$$\left.\begin{array}{lr} A_1 : \ldots \text{„Bude snímať 1. kamera."} & P(A_1) = 0.6, \\ A_2 : \ldots \text{„Bude snímať 2. kamera."} & P(A_2) = 0.8, \\ A_3 : \ldots \text{„Bude snímať 3. kamera."} & P(A_3) = 0.8. \end{array}\right\} \text{javy nie sú disjunktné!!!}$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Príklad (1. b)

Jav A je zjednotením elementárnych javov A_1, A_2 až A_3

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

pre jeho pravdepodobnosť bude preto platiť

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots \end{aligned}$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Príklad (1. b)

Jav A je zjednotením elementárnych javov A_1, A_2 až A_3

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

pre jeho pravdepodobnosť bude preto platiť

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dots \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ &P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ &P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64, \\ &P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.384. \end{aligned} \right\} \textit{javy sú nezávislé!!!}$$

Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Príklad (1. b)

Jav A je zjednotením elementárnych javov A_1, A_2 *až* A_3

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

pre jeho pravdepodobnosť bude preto platiť

$$\begin{aligned} P(A) \quad &= \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P\left(A_2\right) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P\left(A_3\right) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P\left(A_3\right) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.384. \end{array}\right\} \textit{javy sú nezávislé!!!}$$

$$\ldots = 0.6 + 0.8 + 0.8 - 0.48 - 0.48 - 0.64 + 0.384 = 0.984 \ = 98.4\% \spadesuit$$

Pravdepodobnosť opačného javu

Veta (Pravdepodobnosť opačného javu)

Pre pravdepodobnosť opačného javu $\overline{A}$ ku javu A platí

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Dôkaz.

Zrejme platí

$$\begin{aligned} \Omega &= A \cup \overline{A}, \\ P(\Omega) &= P\left(A \cup \overline{A}\right). \end{aligned}$$

Navzájom opačné javy sú disjunktné, a teda

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + P\left(\overline{A}\right), \\ P\left(\overline{A}\right) &= 1 - P(A). \end{aligned}$$

Podmienená pravdepodobnosť

Ak nie sú na výskyt javu A kladené žiadne podmienky, pravdepodobnosť $P(A)$ výskytu javu A nazývame nepodmienená pravdepodobnosť.

Často je však výskyt javu podmienený výskytom iného javu, t. j. jav A sa môže vyskytnúť iba vtedy, ak sa vyskytne jav B, ktorého pravdepodobnosť je $P(B) > 0$. V takomto prípade hovoríme o podmienenej pravdepodobnosti.

Veta (Podmienená pravdepodobnosť)

Podmienená pravdepodobnosť $P(A \mid B)$ dvoch javov je definovaná

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Podmienená pravdepodobnosť

Príklad (2)

Hodíme súčasne dvoma hracími kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že padne súčet nanajvýš rovný 5, ak na prvej kocke padne číslica 2.

Riešenie: $A: \ldots$ „Na prvej kocke padne číslica 2.“
$B: \ldots$ „Padne súčet nanajvýš rovný 5.“
Pravdepodobnosť, že padne na prvej kocke číslo 2 je

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pravdepodobnosť, že padne súčet nanajvýš rovný 5 a zároveň na prvej kocke padne číslica 2 je

$$P(B) = \frac{10}{36}, \qquad P(A \cap B) = \frac{3}{36}.$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{3}{10} = 0.3. \spadesuit$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Pre pravdepodobnosť prieniku náhodných javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

V špeciálnom prípade pre prienik dvoch javov A a B, t. j. prípad ak tieto javy nastanú súčasne, platí, že pravdepodobnosť ich prieniku je rovná pravdepodobnosti jedného javu prenásobená podmienenou pravdepodobnosťou druhého za podmienky nastania prvého javu

$$P(A \cap B) = P\left(A\right) \cdot P\left(B \mid A\right) = P\left(B\right) \cdot P\left(A \mid B\right).$$

Obdobne by sme mohli definovať pravdepodobnosť prieniku troch javov

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right).$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Javy A a B budeme nazývať nezávislé javy ak výskyt javu A nezávisí na výskyte javu B a súčasne výskyt javu B nezávisí na výskyte javu A.

Pre nezávislé javy A a B platí

$$\begin{aligned} P\,(A \mid B) &= P\,(A)\,, \\ P\,(B \mid A) &= P\,(B)\,. \end{aligned}$$

Pre prienik n nezávislých javov bude zrejme platiť nasledovný vzťah

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P\,(A_2) \cdot P\,(A_3) \cdot \ldots \cdot P\,(A_n)\,.$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. a)

V osudí sú 3 biele, 5 červených a 7 modrých guličiek. Náhodne vyberieme 4 guličky za sebou.
Aká je pravdepodobnosť, že 1. gulička bude biela, 2. červená, 3. červená a 4. modrá?

Riešenie: A : . . . „1. biela, 2. červená, 3. červená, 4. modrá“.
A_1 : . . . „1. biela“,
A_2 : . . . „2. červená“,
A_3 : . . . „3. červená“,
A_4 : . . . „4. modrá“.

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4.$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. b)

Výskyt týchto javov je závislý na výsledku predošlého javu, a preto platí

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$= P(A_1) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \cdot P\left(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \dots$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. c)

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. c)

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$P\left(A_2 \mid A_1\right) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{5}{14},$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. c)

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$P\left(A_2 \mid A_1\right) = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{5}{14},$$

$$P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{13}{1}} = \frac{4}{13},$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. d)

$$P\left(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{12}{1}} = \frac{7}{12},$$

Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Príklad (3. d)

$$P\left(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{12}{1}} = \frac{7}{12},$$

A celkovo teda platí

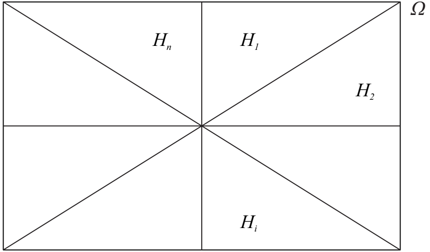
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \cdot P\left(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{78} \doteq 0.0128 = 1.3\%. \spadesuit \end{aligned}$$

Vzorec úplnej pravdepodobnosti

Definícia (Uplný systém javov)

Úplný systém javov nazývame systém javov $H_1, H_2, \ldots, H_n$, *ktoré sú*

1. *po dvoch disjunktné, t. j.* $H_i \cap H_j = \emptyset$ *pre* $i \neq j$,
2. *a súčasne ich zjednotenie tvorí istý jav, t. j.* $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.



Vzorec úplnej pravdepodobnosti

Dôsledok (Vzorec úplnej pravdepodobnosti)

Pokiaľ javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém javov, potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu A určíme pomocou tzv. vzorca úplnej pravdepodobnosti

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$$

alebo tiež

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n).$$

Poznámka (Zovšeobecnení vzorec úplnej pravdepodobnosti)

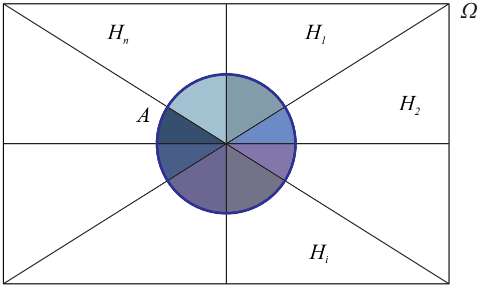
Vzorec úplnej pravdepodobnosti platí aj v prípade, že n nahradíme nekonečnom, t. j. pre $n \to \infty$.

Definícia (Hypotézy)

Javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ zvykneme nazývať hypotézy a platí pre ne

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Hypotézy sú teda navzájom disjunktné (nezlúčiteľné) javy, ktorých zjednotením je istý jav Ω.



Vzorec úplnej pravdepodobnosti

Príklad (4)

Do predajne dodávajú tri výrobné podniky výrobky rovnakého druhu v zastúpení 2 : 3 : 4. *Pravdepodobnosť bezchybného výrobku je z 1. podniku 82%, z 2. podniku 93% a z 3. podniku 90%.*
Aká je pravdepodobnosť, že kúpime bezchybný výrobok?

Riešenie: $A : \ldots$„Kúpime bezchybný výrobok.“
$H_i : \ldots$„Výrobok je z i-tého podniku.“

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)\cdot P(A \mid H_1) + P(H_2)\cdot P(A \mid H_2) + P(H_3)\cdot P(A \mid H_3) \\ &= \frac{2}{9}\cdot 0.82 + \frac{3}{9}\cdot 0.93 + \frac{4}{9}\cdot 0.9 \doteq 0.892 = 89.2\% \spadesuit \end{aligned}$$

Bayesov vzorec

Veta (Bayesov vzorec)

Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém javov. Pokiaľ je výsledkom náhodného pokusu jav A, potom podmienenú pravdepodobnosť javu H_j vzhľadom k javu A vypočítame použitím Bayesovho vzorca

$$P\left(H_j \mid A\right) = \frac{P(H_j) \cdot P\left(A \mid H_j\right)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P\left(A \mid H_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A \mid H_i\right)}.$$

Poznámka

A je známy jav, ktorý nastáva pri náhodnom pokuse. Bayesov vzorec hovorí o pravdepodobnosti hypotézy za podmienky, že nastane jav A.

Poznámka

Bayesov vzorec platí aj v prípade, že n nahradíme nekonečnom, t. j. pre $n \to \infty$.

Príklad (5. a)

Poisťovňa klasifikuje vodičov do troch kategórií, a to na A_1 *- dobrý,* A_2 *- stredne dobrý a* A_3 *- zlý. Podľa skúseností vedia, že skupina* A_1 *tvorí približne 20% poistených, skupina* A_2 *30% a najpočetnejšou je skupina* A_3 *s 50%-ným zastúpením. Pravdepodobnosť, že vodič zo skupiny* A_1 *bude mať nehodu je 0.01, pre vodiča zo skupiny* A_2 *je táto možnosť 0.03, no a pre vodiča poslednej kategórie to je 0.1. Poisťovacia spoločnosť poistí pána Z, následne má pán Z nehodu, aká je pravdepodobnosť, že pán Z patrí do kategórie* A_3*?*

Bayesov vzorec

Príklad (5. b)

Riešenie: $A : \ldots$ *„Má nehodu.“*

$$
\begin{aligned}
&H_1 : \ldots \text{„\textit{Patrí do} } A_1.\text{“} && \Longrightarrow P(H_1) = 0.2 \\
&H_2 : \ldots \text{„\textit{Patrí do} } A_2.\text{“} && \Longrightarrow P(H_2) = 0.3 \\
&H_3 : \ldots \text{„\textit{Patrí do} } A_3.\text{“} && \Longrightarrow P(H_3) = 0.5
\end{aligned}
$$

$H_3 \mid A : \ldots$ „*Patrí do* A_3 *a má nehodu.*“

$$
\begin{aligned}
P(H_3 \mid A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} \\
&= \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.2 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.1} \doteq 0.82 = 82\%. \spadesuit
\end{aligned}
$$

Bayesov vzorec - Monty Hallov problém I.

Príklad (6 - Monty Hallov problém[1])

Moderátor umiestnil súťažné cenu - auto - za jedny z troch dverí. Za každými zo zostávajúcich dverí je cena útechy - koza. Úlohou súťažiaceho je zvoliť si jedny dvere. Potom moderátor otvorí jedny z dvoch zostávajúcich dverí, ale len tie, za ktorými je koza. Teraz má súťažiaci možnosť buď ponechať svoju pôvodnú voľbu, alebo zmeniť voľbu na zostávajúce dvere. Súťažiaci vyhráva cenu, ktorá je za dverami, ktoré si zvolil. Súťažiaci nemá žiadne predchádzajúce znalosti, ktoré by mu umožnili odhaliť, čo je za dverami.
Nech súťažiaci najprv zvolí dvere č. 1, a nech moderátor otvorí dvere číslo 3, za ktorými je koza. Zvýši sa šance na výhru auta, ak súťažiaci zmení voľbu na dvere č. 2?

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`

Bayesov vzorec - Monty Hallov problém II.

Riešenie: D_i: . . . „Auto je za i-tými dverami.“
M_j: . . . „Moderátor otvorí j-té dvere.“

$$P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} P(M_3 \mid D_1) &= \frac{1}{2}, \\ P(M_3 \mid D_2) &= 1, \\ P(M_3 \mid D_3) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D_2 \mid M_3) &= \frac{P(D_2) \cdot P(M_3 \mid D_2)}{P(D_1) \cdot P(M_3 \mid D_1) + P(D_2) \cdot P(M_3 \mid D_2) + P(D_3) \cdot P(M_3 \mid D_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Zmenou voľby dverí sa šanca výhry zmení dvojnásobne.♠

Bernoulliho vzorec

Veta (Bernoulliho vzorec)

Nech pravdepodobnosť realizácie javu A je v každom jednotlivom pokuse rovná p. Potom pravdepodobnosť k-násobného výskytu javu A v n nezávislých pokusoch je daná Bernoulliho vzorcom

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}\,.$$

Poznámka

Ak označíme $q = 1 - p$ (t. j. pravdepodobnosť opačného javu), potom

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Príklad (7)

Podnik vyrába 70% produkcie I. triedy kvality.
Určime pravdepodobnosť, že v sérii 100 výrobkov počet výrobkov prvotriednej kvality je od 60 do 62.

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P_{100}(60) \cup P_{100}(61) \cup P_{100}(62) = P_{100}(60) + P_{100}(61) + P_{100}(62) \\
&= \binom{100}{60} \cdot 0.7^{60} \cdot 0.3^{40} + \binom{100}{61} \cdot 0.7^{61} \cdot 0.3^{39} + \binom{100}{62} \cdot 0.7^{62} \cdot 0.3^{38} \\
&\doteq 0.0085 + 0.0130 + 0.0191 = 0.040\,6 \doteq 4.1\%. \spadesuit
\end{aligned}
$$

Zhrnutie I.

Pravdepodobnosť zjednotenia n náhodných javov:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}^{n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n}^{n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right)$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} \cdot P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right).$$

Pravdepodobnosť zjednotenia 2-och náhodných javov je daná vzťahom

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pravdepodobnosť zjednotenia 3-och náhodných javov je daná vzťahom

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Zhrnutie II.

Podmienená pravdepodobnosť $P(A \mid B)$ dvoch javov je definovaná

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Pre **pravdepodobnosť prieniku** náhodných javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Zhrnutie III.

Pokiaľ javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tvoria úplný systém javov (sú po dvoch disjunktné, t. j. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, a súčasne ich zjednotenie tvorí istý jav, t. j. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$.), potom pravdepodobnosť javu A určíme pomocou tzv. **vzorca úplnej pravdepodobnosti**

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)\,. \end{aligned}$$

Pokiaľ je výsledkom náhodného pokusu jav A, potom podmienenú pravdepodobnosť javu H_j vzhľadom k javu A vypočítame použitím **Bayesovho vzorca**

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}.$$