Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta, UNIZA

Numerické riešenie okrajových úloh

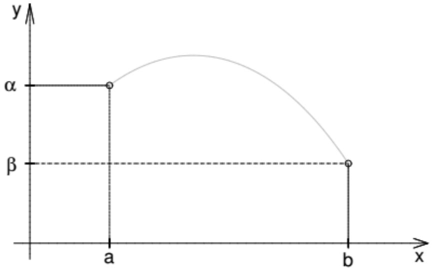
Pavol ORŠANSKÝ

12. októbra 2023

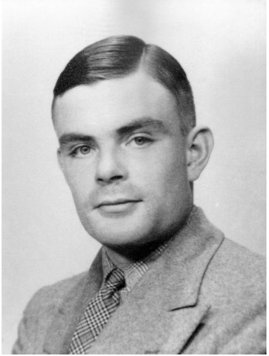
Okrajové úlohy

Pri **okrajových úlohách** je daná funkčná hodnota v oboch krajných hodnotách intervalu, t. j. budeme hľadať riešenie diferencálnej rovnice druhého rádu na intervale $[a, b]$ s okrajovými podmienkami (teda vyhovúce dvom podmienkam)

$$y'' = F\left(x, y, y'\right), \qquad y\left(a\right) = \alpha, \qquad y\left(b\right) = \beta. \tag{1}$$



Okrajové úlohy



"Science is a differential equation. Religion is a boundary condition." **Alan Turing**

Okrajové úlohy - numerické derivovanie

Najjednoduchším spôsobom odhadu derivácie v bode x_0

$$y'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

je, pre $h \rightsquigarrow 0$, použiť jej prvú diferenciu, t. j.

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}.$$

Z Taylorovho rozvoja f-cie v bode dostávame totožný vzťah

$$\begin{aligned}
y(x_0 + h) &= y(x_0) + \boxed{y'(x_0) \cdot h} + y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots, \\
\boxed{y'(x_0) \cdot h} &= y(x_0 + h) - y(x_0) - y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} - \ldots, \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{h} \\
y'(x_0) &= \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} \cdot y''(x_0)}_{\text{chyba 1. rádu}} - \underbrace{\frac{h^2}{6} \cdot y'''(x_0) - \ldots}_{\text{chyby vyššieho rádu}}
\end{aligned}$$

Okrajové úlohy - numerické derivovanie

Iný spôsob hľadania aproximácie derivácie funkcie je nahradenie funkcie **Lagrangeovým interpolačným polynómom** príslušného rádu a jeho následnou deriváciou, t. j.

$$y(x) \approx L_n(x) \qquad \Rightarrow \qquad y^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x),$$

kde

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_{j,n}(x) \cdot y(x_i) \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{j=0}^{n} l_{j,n}(x) \cdot y_i .$$

Pre tento polynóm zrejme platí

$$y(x) = L_n(x) + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)}_{\text{chyba Lagrangeovho interpolačného polynómu}}, \qquad x \in [x_0, x_n] .$$

Okrajové úlohy - numerické derivovanie

Predošlý vzťah zderivujeme a dostávame

$$\begin{aligned} y'(x) &= L_n'(x) + \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \right)' \cdot y^{(n+1)}(\xi) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \cdot \left(y^{(n+1)}(\xi) \right)', \end{aligned}$$

ak dosadíme za $x = x_i$ dostávame

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= L_n'(x_i) + \left(\frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}{(n+1)!} \right)' \cdot y^{(n+1)}(\xi) \\ &\quad \underbrace{+ \frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}{(n+1)!}}_{=0} \cdot \left(y^{(n+1)}(\xi) \right)', \end{aligned}$$

Okrajové úlohy - numerické derivovanie

Odkiaľ po úprave dostávame tvar

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= L'_n(x_i) + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_j) \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ &= L'_n(x_i) + (-1)^{n+1} h^n i! (n-1)! \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

A teda platí

$$y'(x_i) = L'_n(x_i) + O(h^n),$$

a všeobecnejšie platí

$$y^{(k)}(x_i) = L_n^{(k)}(x_i) + O_k\left(h^{n+1-k}\right).$$

Použitím Lagrangeovho interpolačného polynómu druhého stupňa

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \\
&\quad +\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1} \\
&= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h\cdot 2h}\cdot y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h\cdot h}\cdot y_i \\
&\quad +\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h\cdot h}\cdot y_{i+1},
\end{aligned}
$$

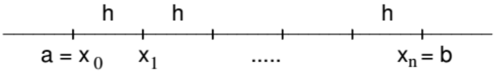
Okrajové úlohy - numerické derivovanie

po zderivovaní dostávame pre deriváciu

$$\begin{aligned} L_2'(x) &= \frac{(x - x_i) - (x - x_{i+1})}{2h^2} \cdot y_{i-1} \\ &+ \frac{(x - x_{i-1}) - (x - x_{i+1})}{h^2} \cdot y_i \\ &+ \frac{(x - x_{i-1}) - (x - x_i)}{2h^2} \cdot y_{i+1}. \end{aligned}$$

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Interval $[a, b]$ rozdelíme ekvidištančne na n rovnakých podintervalov šírky $h = (b - a)/n$ a riešenia hľadáme v tzv. uzlových bodoch $x_i = a + ih$, kde $i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Predpokladáme platnosť rovnice (1) vo všetkých vnútorných uzlových bodoch, t. j.

$$y''(x_i) = F\left(x_i, y(x_i), y'(x_i)\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Príslušné derivácie nahradíme diferenciami[1]

$$
\begin{aligned}
y''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \\
y'(x_i) &= \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h}
\end{aligned}
$$

a dostávame

$$
\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,
$$

čo spolu s okrajovými podmienkami dáva sústavu (vo všeobecnosti nelineárnu!!!) **diskretizačných rovníc** s neznámymi $y_1, \ldots y_{n-1}$, ktorú vyriešime.

[1] ozn. $y_i = y(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Metodiku podrobnejšie popíšeme na okrajovej úlohe

$$-y'' + \sigma(x) \cdot y = f(x), \qquad y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \tag{2}$$

Veta

Ak sú funkcie $\sigma(x), f(x)$ spojité na $[a; b]$ a $\sigma(x) \geq 0$ pre $x \in [a; b]$, potom okrajová úloha (2) má riešenie pre akékoľvek hodnoty α a β.

Odvodíme diskreditačné rovnice (ozn. $f(x_i) = f_i$, $\sigma(x_i) = \sigma_i$)

$$\begin{aligned} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \sigma_i \cdot y_i &= f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ -y_{i+1} + \left(2 + h^2\sigma_i\right) y_i - y_{i-1} &= h^2 f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

Ak dosadíme z okrajových podmienok $y_0 = \alpha$ a $y_n = \beta$ dostaneme sústavu

$$
\begin{aligned}
\left(2 + h^2\sigma_1\right) y_1 - y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= h^2 f_1 + \alpha, \\
-y_1 + \left(2 + h^2\sigma_2\right) y_2 - y_3 \qquad\qquad &= h^2 f_2, \\
-y_2 + \left(2 + h^2\sigma_3\right) y_3 - y_4 \qquad &= h^2 f_3, \\
&\vdots \\
-y_{n-2} + \left(2 + h^2\sigma_{n-1}\right) y_{n-1} &= h^2 f_{n-1} + \beta.
\end{aligned}
$$

Matica je tridiagonálna, symetrická a diagonálne dominantná.
Dá sa ukázať, že je aj pozitívne definitná.
Riešenie môžeme nájsť napr. Gaussovou eliminačnou metódou.

Príklad

Metódou konečných diferencií riešte okrajovú úlohu

$$-y'' + \left(1 + x^2\right) \cdot y = x, \qquad y\left(0\right) = 1, \quad y\left(1\right) = 2,$$

s krokom $h = 0.25$.

Riešenie: Riešenie hľadáme v uzlových bodoch $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.50$, $x_3 = 0.75$, v krajných bodoch intervalu riešenie poznáme z okrajových úloh.
Výsledky pomocných výpočtov zaznamenáme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\sigma_i = \left(1 + x_i^2\right)$		1.0625	1.25	1.5625	
$f_i = x_i$		0.25	0.50	0.75	

Sústava diskreditačných rovníc má tvar

$$\begin{aligned} 2.0664 \cdot y_1 - y_2 \qquad\qquad &= 0.0156 + 1, \\ -y_1 + 2.0781 \cdot y_2 - y_3 \qquad &= 0.0313, \\ -y_2 + 2.0977 \cdot y_3 &= 0.0469 + 2. \end{aligned}$$

A jej riešením dostávame $y_1 \doteq 1.140, y_2 \doteq 1.341, y_3 \doteq 1.615.$

Pre porovnanie, presné hodnoty sú $y(x_1) \doteq 1.138, y(x_2) \doteq 1.337, y(x_3) \doteq 1.612.$

Okrajové úlohy - Metóda streľby

Základným princípom metódy streľby je **prevedenie okrajovej úlohy**

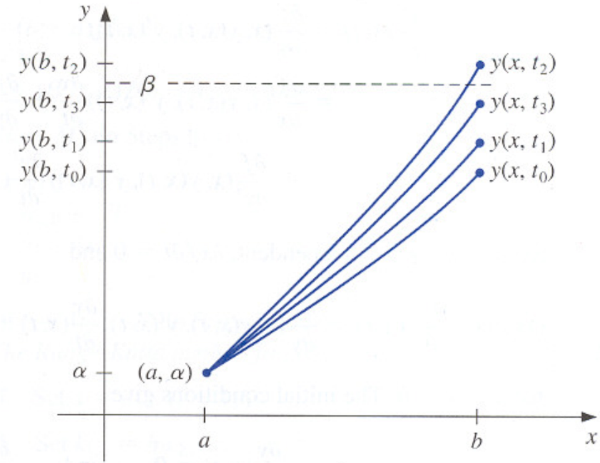
$$y'' = F\left(x, y, y'\right), \qquad y\left(a\right) = \alpha, y\left(b\right) = \beta,$$

na počiatočnú úlohu druhého rádu, pri ktorej okrem počiatočnej hodnoty v bode $a = x_0$ musíme poznať aj jej prvú deriváciu v tomto bode (smernicu dotyčnice)

$$y'' = F\left(x, y, y'\right), \qquad y\left(a\right) = \alpha, y'\left(a\right) = t.$$

Ak by sme si túto hodnotu derivácie $y'\left(a\right) = t$ zvolili, mohli by sme niektorou z metód na riešenie počiatočnej úlohy nájsť približné riešenie tejto diferenciálnej rovnice druhého rádu, avšak zrejme by sme „netrafili" požadovanú druhú okrajovú úlohu $y\left(b\right) = \beta$. Korekciou by sme mohli nájsť riešenie, ktoré sa pôvodnému priblíži viac a tak ďalej, až kým by sme nedosiahli požadovanú presnosť.

Okrajové úlohy - Metóda streľby



Okrajové úlohy - Metóda streľby

V podstate ide o riešenie rovnice

$$y\,(b,t) = \beta, \qquad \text{resp. } y\,(b,t) - \beta = 0,$$

čo je nelineárna rovnica neznámeho parametra t, ktorú môžeme riešiť napr. metódou sečníc a iteračná postupnosť má potom tvar

$$t_k = t_{k-1} - \left(y\,(b,t_{k-1}) - \beta\right) \frac{t_{k-1} - t_{k-2}}{y\,(b,t_{k-1}) - y\,(b,t_{k-2})},$$

kde $k = 2, 3, \ldots$